УДК 519.21

Д.Ф. Кузнецов

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА К СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *

Введение. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in [0,\, T]}$ — неубывающее непрерывное справа семейство σ-подалгебр $\mathfrak{F}$. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений в интегральной форме

$$x_t = x_0 + \int\limits_0^t a(x_s, u(s), s)\, ds + \int\limits_0^t B(x_s, s)\, dW_s + \int\limits_0^t \int\limits_\Gamma C(x_s, s, y)\, \tilde{\nu}(dy, ds), \qquad (1)$$

где $x_s \in \mathbb{R}^n$ — решение системы (1); $W_s \in \mathbb{R}^m$ — $\mathfrak{F}_t$-измеримый при всех $s \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $\Gamma = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$;

$$\tilde{\nu}(dy, ds) = \nu(dy, ds) - \pi(dy)\, ds,$$

$\nu(dy,\, ds)$ — целочисленная пуассоновская мера на $\Gamma \times [0, T]$; $M\{\nu(dy, ds)\} = \pi(dy)\, ds$; $\pi(dy)$ есть мера интенсивности $\nu(dy, ds)$, причем $\pi(\Gamma) < \infty$; $a\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$; $B\colon \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^{n \times m}$, $C\colon \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ — матричные функции; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное условие; $u\colon [0, T] \to \mathbb{R}^k$ — управляющее воздействие. Второй интеграл в правой части (1) понимается в смысле Ито, а третий — следующим образом [1]:

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Gamma C(x_s, s, y)\, \tilde{\nu}(dy, ds) = \lim_{\substack{\Delta_n \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_\Gamma C(x_{\tau_j}, \tau_j, y)\, \tilde{\nu}(dy, [\tau_j, \tau_{j+1})), \qquad (2)$$

где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = t$; $\Delta_n = \max\limits_{0 \le j \le n-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|$; предел понимается в среднеквадратическом смысле или по вероятности, в зависимости от

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства общего и профессионального образования РФ (грант 97-0-1.8-71) и РФФИ (грант 99-01-00719).

 ISSN 0572-2691

свойств случайной функции $C(x_t, t, y)$. Предположим также, что функции a, B, C удовлетворяют условиям существования и единственности решения системы (1) [1].

Известно [1–4], что при $C \equiv 0$ различные частные случаи системы уравнений (1) являются адекватными математическими моделями ряда физических и технических систем. В том случае, когда в (1) присутствует слагаемое $\int\limits_0^t \int\limits_\Gamma C(x_s, s, y)\,\tilde{\nu}(dy, ds)$, эта система стохастических дифференциальных уравнений также находит применение как математическая модель, в частности в области финансовой математики [2].

Один из эффективных подходов к численному интегрированию системы (1) при $C \equiv 0$ основан на разложениях Тейлора–Ито или Тейлора–Стратоновича [5–19], в которые входят системы повторных стохастических интегралов вида

$$\int\limits_t^s \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1)\, dW_{t_1}^{(i_1)} \ldots dW_{t_k}^{(i_k)}, \tag{3}$$

$$\int\limits_t^{*s} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1)\, dW_{t_1}^{(i_1)} \ldots dW_{t_k}^{(i_k)}; \tag{4}$$

$\psi_1, \ldots, \psi_k$ — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, s]$ функции; $i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, m$; $W_t^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы; $W_t^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} t$; $\int\limits^{*}$ — стохастический интеграл Стратоновича, $\int$ — стохастический интеграл Ито. При этом полагается

$$\int\limits_a^{*b} g(s)\, dW_s^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^b g(s)\, ds, \qquad \int\limits_a^b g(s)\, dW_s^{(0)} \stackrel{def}{=} \int\limits_a^b g(s)\, ds.$$

В работе [11] был предложен подход к численному интегрированию системы (1), основанный на применении разложения Тейлора–Ито и метода Монте-Карло. Суть этого подхода в следующем. Промежуток интегрирования $[0, T]$ разбивается точками $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = T$ так, чтобы среди τ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, встречались все моменты скачков пуассоновского процесса $\nu(\Gamma, [0, t))$. Если в точке τ_0 нет скачка $\nu(\Gamma, [0, t))$, то на промежутке $[0, \tau_0]$ процесс x_t является диффузионным, описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида

$$dx_t = (a(x_t, u(t), t) - \int\limits_\Gamma C(x_t, t, y)\, \pi(dy))\, dt + B(x_t, t)\, dW_t$$

и может быть численно смоделирован в момент τ_0, например, с помощью численных методов, основанных на разложении Тейлора–Ито. Если в точке τ_0 наблюдается скачок процесса x_t, то численно моделируется $x_{\tau_0}^-$

$(x_t^- \overset{\mathrm{def}}{=} x_{t-0})$ с помощью численных методов, основанных на разложении Тейлора–Ито, и полагается

$$x_{\tau_0} = x_{\tau_0}^- + \int\limits_{\Gamma} C(x_{\tau_0}^-, \tau_0, y)\, \nu(dy, \{\tau_0\}). \tag{5}$$

Интеграл в правой части (5) моделируется с помощью метода Монте-Карло. Далее переходим к моменту времени τ_1 и повторяем описанную процедуру, затем к τ_2 и т.д.

Таким образом, численное решение не только стохастических дифференциальных уравнений Ито, но и стохастических дифференциальных уравнений более общего вида сводится на одном из этапов к совместному численному моделированию систем повторных стохастических интегралов вида (3), (4). При этом известно [5, 6, 14, 15], что каждый интеграл (3) может быть представлен выражением, в которое входят интегралы вида (4) кратности $q \leqslant k$ и нестохастические слагаемые.

В [16] была доказана теорема о разложении повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (4) в кратный ряд из произведений стандартных гауссовских случайных величин, которая дает эффективный метод среднеквадратической аппроксимации этого интеграла.

Приведем формулировку теоремы.

Теорема. Пусть выполнены условия:

1) $\psi_1(\theta), \ldots, \psi_k(\theta)$ — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, s]$ функции;

2) $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([t, s])$ система непрерывно дифференцируемых функций, для которой ряд Фурье $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j \varphi_j(x)$, $C_j = \int\limits_t^s f(y)\, \varphi_j(y)\, dy$, для любой кусочно-гладкой на открытом интервале (t, s) и ограниченной на промежутке $[t, s]$ функции $f(x)$ сходится для любого $x \in (t, s)$ к $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, конечен при $x = t, s$ и сходится равномерно к $f(x)$ в любом замкнутом интервале непрерывности $f(x)$.

Тогда

$$J_{s,t}^{*(k)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \zeta_{(j_l)\, s,t}^{(i_l)}, \tag{6}$$

где

$$J_{s,t}^{*(k)} = \int\limits_t^{*s} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1)\, dW_{t_1}^{(i_1)} \ldots dW_{t_k}^{(i_k)};$$

$\zeta_{(j_l)\, s,t}^{(i_l)} = \int\limits_t^s \varphi_{j_l}(\theta)\, dW_\theta^{(i_l)}$ — независимые при различных i_l или j_l (при $i_l \neq 0$) стандартные гауссовские случайные величины;

$$C_{j_k \ldots j_1} = \int\limits_{[t,s]^k} K(t_1, \ldots, t_k) \prod_{l=1}^{k} \varphi_{j_l}(t_l)\, dt_1 \ldots dt_k;$$

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\prod_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{k-1}1_{\{t_l<t_{l+1}\}},\ t_1,\ldots,t_k\in[t,s],\ k\geq 2;$$

ряд (6) сходится в среднеквадратическом смысле; 1_A — индикатор множества A; $[t,s]^k \stackrel{\mathrm{def}}{=} [t,s]\underbrace{\times\ldots\times}_{k-1}[t,s]$.

В [15] показано, что ряд (6) сходится не только в среднеквадратическом смысле, но и в среднем степени n; $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.

Теорема дает эффективный метод аппроксимации интегралов $J^{*(k)}_{s,t}$:

$$J^{*(k)q}_{s,t}=\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta^{(i_l)}_{(j_l)s,t}, \tag{7}$$

где $J^{*(k)q}_{s,t}$ — аппроксимация интеграла $J^{*(k)}_{s,t}$, а $q<\infty$ выбирается из условия

$$M\{(J^{*(k)}_{s,t}-J^{*(k)q}_{s,t})^2\}\leq\varepsilon;\ \varepsilon\geq 0.$$

В [16] приведена простая формула для вычисления $M\{(J^{*(k)}_{s,t}-J^{*(k)q}_{s,t})^2\}$ при попарно различных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$:

$$M\{(J^{*(k)}_{s,t}-J^{*(k)q}_{s,t})^2\}=\int\limits_{[t,s]^k}K^2(t_1,\ldots,t_k)\,dt_1\ldots dt_k-\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q}C^2_{j_k\ldots j_1}. \tag{8}$$

В [16] отмечалось (на примере стохастического интеграла второй кратности), что минимальная совокупность независимых стандартных гауссовских случайных величин, входящая в (7), в случае использования полиномиальной системы функций приблизительно в три раза короче, чем аналогичная совокупность в случае применения тригонометрической системы функций. Кроме этого, в [16] показано, что аппроксимация вида (7), полученная с использованием тригонометрической системы функций, сходится примерно в три раза быстрее в среднеквадратическом смысле, чем аппроксимация, основанная на кратных интегральных суммах.

Еще одним преимуществом полиномиальной системы функций перед тригонометрической при построении аппроксимаций вида (6) является то, что формулы вида (7) для конкретных стохастических интегралов более простые. Таким образом, среднеквадратические аппроксимации вида (7), полученные с использованием полиномиальной системы функций, наиболее эффективны. Цель настоящей работы заключается в построении аппроксимаций вида (7) с использованием системы полиномов Лежандра для конкретных стохастических интегралов Стратоновича кратностей 1–5. С помощью построенных аппроксимаций могут быть численно реализованы алгоритмы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений порядков точности 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 в среднеквадратическом смысле. Эти алгоритмы представлены в обширной литературе (см., например, [5–8, 11, 13–15, 18, 19]).

О минимальных совокупностях повторных стохастических интегралов. Выделим минимальные совокупности повторных стохастических интегралов, необходимые для аппроксимаций решения стохастического дифференциального уравнения Ито (уравнение (1) при $C \equiv 0$) с порядками сходимости 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 и 2.5 в среднеквадратическом смысле. При этом будем использовать разложение Тейлора–Стратоновича [12, 14, 15].

Введем обозначения:

$$B_{0\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)} g(x,t) = LB_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)} g(x,t) - \frac{1}{2}\sum_{i_k=1}^{m} G^{(i_k)}G^{(i_k)}B_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)} g(x,t),$$

$$B_{1\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_k i_{k-1}\dots i_1)} g(x,t) = G^{(i_k)}B_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)} g(x,t),\ k = 2, 3, \dots;$$

$$B_0 g(x,t) = Lg(x,t) - \frac{1}{2}\sum_{i_1=1}^{m} G^{(i_k)}G^{(i_k)} g(x,t);\ B_1^{(i_1)} g(x,t) = G^{(i_1)} g(x,t);$$

$$L_{x,t}\, g(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} g(x,t) + \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}\, g(x,t) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l,i=1}^{n} B^{(lj)}(x,t)\, B^{(ij)}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^{(l)}\partial x^{(i)}} g(x,t),$$

$$G^{(i)} g(x,t) = \sum_{j=1}^{n} B^{(ji)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x^{(j)}} g(x,t);\ i = 1, \dots, m;$$

$${}^{(k)}A \stackrel{\text{def}}{=} \| A^{(i_1\dots i_k)} \|_{i_1=1,\dots,\, i_k=1}^{m_1\quad\ m_k};\ m_1, \dots, m_k \geqslant 1;$$

$${}^{(k)}A \overset{k}{\cdot} {}^{(k)}C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i_1=1}^{m_1}\dots\sum_{i_k=1}^{m_k} A^{(i_1\dots i_k)}\, C^{(i_1\dots i_k)};$$

$${}^{(p_k)}J^{*}_{(\mu_k\dots\mu_1)\,s,t} = \| J^{*(i_k\dots i_1)}_{(\mu_k\dots\mu_1)\,s,t} \|_{i_1=\delta_1,\dots,\, i_k=\delta_k}^{m\delta_1\quad\ m\delta_k};$$

$$J^{*(i_k\dots i_1)}_{(\mu_k\dots\mu_1)\,s,t} = \int\limits_t^{*s}\dots\int\limits_t^{*t_2} dW_{t_1}^{(i_k)}\dots dW_{t_k}^{(i_1)};$$

$\mu_l = 0$ или 1; $\delta_l = 0$ и $i_l = 0$ при $\mu_l = 0$; $\delta_l = 1$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\mu_l = 1$;

$p_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \delta_j$; $l = 1, \dots, k$; $g(x,t)$ — многократно непрерывно дифференцируемая по x и t функция.

Запишем численный метод порядка 2.5 в среднеквадратическом смысле для стохастического дифференциального уравнения Ито (уравнение (1)

ISSN 0572-2691

при $C \equiv 0$), основанный на разложении Тейлора–Стратоновича [12, 14, 15]:

$$
\begin{aligned}
y_{p+1} = y_p &+ {}^{(1)}B_1\{y_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J^*_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + B_0\{y_p\}\Delta + {}^{(2)}B_{11}\{y_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J^*_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
&+ {}^{(1)}B_{01}\{y_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J^*_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(1)}B_{10}\{y_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J^*_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
&+ {}^{(3)}B_{111}\{y_p\} \overset{3}{\cdot} {}^{(3)}J^*_{(111)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(2)}B_{101}\{y_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J^*_{(101)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
&+ {}^{(2)}B_{011}\{y_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J^*_{(011)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(2)}B_{110}\{y_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J^*_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} + B_{00}\{y_p\}\frac{\Delta^2}{2} + \\
&+ {}^{(4)}B_{1111}\{y_p\} \overset{4}{\cdot} {}^{(4)}J^*_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(1)}B_{100}\{y_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J^*_{(100)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
&+ {}^{(1)}B_{010}\{y_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J^*_{(010)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(1)}B_{001}\{y_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J^*_{(001)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
&+ {}^{(3)}B_{1110}\{y_p\} \overset{3}{\cdot} {}^{(3)}J^*_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(3)}B_{1101}\{y_p\} \overset{3}{\cdot} {}^{(3)}J^*_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
&+ {}^{(3)}B_{1011}\{y_p\} \overset{3}{\cdot} {}^{(3)}J^*_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(3)}B_{0111}\{y_p\} \overset{3}{\cdot} {}^{(3)}J^*_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
&+ {}^{(5)}B_{11111}\{y_p\} \overset{5}{\cdot} {}^{(5)}J^*_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $\tau_p = p\Delta$; $p = 0, 1, \ldots, N$; $\Delta = T/N$; $y_{\tau_p} \overset{\text{def}}{=} y_p$; предполагается также, что выполнены условия существования правой части (9). Если взять в правой части (9) первые три слагаемых, то получим метод Эйлера, который сходится сильно с порядком $\gamma = 0.5$ при определенных условиях [5–7] к решению стохастического дифференциального уравнения Ито, т.е.

$$M\{|x_T - y_T|\} \le K\Delta^\gamma,$$

где постоянная K не зависит от Δ. Для численной реализации метода Эйлера необходимо численно моделировать стохастические интегралы $J^{*(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}$, $i = 1, \ldots, m$. Для этого используются простые соотношения

$$J^{*(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} = \sqrt{\Delta}\,\zeta_p^{(i)},$$

где $\zeta_p^{(i)}$ — независимые при различных p или i стандартные гауссовские случайные величины.

Если в правой части (9) взять первые четыре слагаемых, то получим метод Г.Н. Мильштейна, сходящийся сильно с порядком $\gamma = 1.0$ при определенных условиях [5–7, 14, 15] к решению стохастического дифференциального уравнения Ито. Для численной реализации данного метода необходимо совместно численно моделировать стохастические интегралы

$$J^{*(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p},\ J^{*(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p},\quad i_1, i_2 = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Возьмем в правой части (9) первые семь слагаемых. В результате получим численный метод, сходящийся сильно с порядком $\gamma = 1.5$ при подходящих условиях [5–7, 14, 15] к решению стохастического дифференциального уравнения Ито. Для численной реализации данного метода необходимо численно моделировать следующую совокупность повторных стохастических интегралов:

$$J^{*(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p},\ J^{*(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p},\ J^{*(0 i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p},\ J^{*(i_2 0)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p},\ J^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}, \tag{11}$$

$$i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m.$$

Совокупность (11) не является минимальной в том смысле, что интегралы $J^{*(0 i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$, $J^{*(i_2 0)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}$ могут быть выражены один через другой. Действительно, с помощью леммы 2 [16] и теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито [14, 15, 20] можно показать, что

$$J^{*(0 i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} = -I^{*(i_1)}_{1\,\tau_{p+1},\tau_p} \quad \text{почти наверно (п.н.)},$$

$$J^{*(i_2 0)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} = \Delta I^{*(i_2)}_{0\,\tau_{p+1},\tau_p} + I^{*(i_2)}_{1\,\tau_{p+1},\tau_p} \quad \text{п.н.};$$

здесь и далее

$$I^{*(i_k \ldots i_1)}_{l_k \ldots l_1\, s,t} \overset{\text{def}}{=} \int\limits_t^{*s} (t - t_k)^{l_1} \ldots \int\limits_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_k} dW^{(i_k)}_{t_1} \ldots dW^{(i_1)}_{t_k};$$

$$i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m;\ l_k, \ldots, l_1 \in \mathbf{N}.$$

Таким образом, минимальная совокупность повторных стохастических интегралов, необходимая для реализации сильного численного метода порядка 1.5, имеет вид

$$I^{*(i_1)}_{0\,\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{*(i_2 i_1)}_{00\,\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{*(i_1)}_{1\,\tau_{p+1},\tau_p},\ I^{*(i_3 i_2 i_1)}_{000\,\tau_{p+1},\tau_p};\quad i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

Перейдем к рассмотрению минимальных совокупностей повторных стохастических интегралов, необходимых для численной реализации сильных численных методов порядков 2.0 и 2.5.

 ISSN 0572-2691

С помощью леммы 2 [16] и теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито [14, 15, 20] получим:

$$J^{*(0i_2i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p} = -I^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} \text{ п.н.}, \tag{13}$$

$$J^{*(i_3i_20)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} = \Delta I^{*(i_3i_2)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} + I^{*(i_3i_2)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} \text{ п.н.}, \tag{14}$$

$$J^{*(i_30i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p} = I^{*(i_3i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} - I^{*(i_3i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} \text{ п.н.} \tag{15}$$

Возьмем первые 12 слагаемых в правой части (9). В результате получим численный метод, сходящийся сильно с порядком $\gamma = 2.0$ при определенных условиях [5–7, 14, 15] к решению стохастического дифференциального уравнения Ито. Таким образом, согласно (13)–(15), минимальная совокупность повторных стохастических интегралов, необходимая для численной реализации данного численного метода, имеет следующий вид:

$$I^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}},\ I^{*(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}},\ I^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}},\ I^{*(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}},\ I^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}},$$

$$I^{*(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}},\ I^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}};\quad i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Развивая рассматриваемый подход, получаем:

$$J^{*(i_300)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p} = \frac{\Delta^2}{2} I^{*(i_3)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta I^{*(i_3)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{1}{2} I^{*(i_3)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}} \text{ п.н.}, \tag{17}$$

$$J^{*(0i_20)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p} = -\Delta I^{*(i_2)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} - I^{*(i_2)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}} \text{ п.н.}, \tag{18}$$

$$J^{*(00i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p} = \frac{1}{2} I^{*(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}} \text{ п.н.}, \tag{19}$$

$$J^{*(i_4i_3i_20)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p} = \Delta I^{*(i_4i_3i_2)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} + I^{*(i_4i_3i_2)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}} \text{ п.н.}, \tag{20}$$

$$J^{*(0i_3i_2i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p} = -I^{*(i_3i_2i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}} \text{ п.н.}, \tag{21}$$

$$J^{*(i_40i_2i_1)}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p} = -I^{*(i_4i_2i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}} + I^{*(i_4i_2i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}} \text{ п.н.}, \tag{22}$$

$$J^{*(i_4i_30i_1)}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p} = I^{*(i_4i_3i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}} + I^{*(i_4i_3i_1)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}} \text{ п.н.} \tag{23}$$

Из (16)–(23) следует, что минимальная совокупность повторных стохастических интегралов, необходимая для численной реализации численного метода (9), имеет вид

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)},\ I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)},\ I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)},\ I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)},\ I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)},\ I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)},$$

$$I_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)},\ I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)},\ I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)},\ I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)},\ I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)},\ I_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \qquad (24)$$

Далее будем называть совокупности (10), (12), (16), (24) соответственно 1.0-, 1.5-, 2.0-, 2.5-минимальными совокупностями стохастических интегралов.

Численное моделирование 1.0-минимальной совокупности стохастических интегралов. Для построения аппроксимаций вида (7) будем использовать полную ортонормированную в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ систему многочленов Лежандра

$$\Phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{\Delta}}\, P_j\left(\left(x - \frac{2\tau_p + \Delta}{2}\right)\frac{2}{\Delta}\right),\ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $P_j(x)$ — классический многочлен Лежандра:

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}((x^2-1)^j),\ j = 1, 2, \ldots,$$

$$P_0(x) = 1.$$

Отметим некоторые известные свойства многочленов $P_j(x)$, которые будем использовать при вычислении коэффициентов кратных рядов Фурье:

$$\frac{d}{dx}P_{j+1}(x) - \frac{d}{dx}P_{j-1}(x) = (2j+1)\,P_j(x),\ j = 1, 2, \ldots, \qquad (25)$$

$$\int_{-1}^{1} x^k P_j(x)\,dx = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, j-1, \qquad (26)$$

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\,P_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ \dfrac{2}{2j+1}, & k = j, \end{cases} \qquad (27)$$

$$jP_j(x) - (2j-1)\,xP_{j-1}(x) + (j-1)\,P_{j-2}(x) = 0,\ j = 2, 3, \ldots. \qquad (28)$$

Применяя (25)–(28), получаем частный вид формулы (7) для стохастического интеграла $I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)}$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$:

$$I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)\,q} = \frac{\Delta}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left(\zeta_{i-1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)}\right)\right], \qquad (29)$$

где $\zeta_j^{(i)} \overset{\text{def}}{=} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \Phi_j(s)\,dW_s^{(i)}$.

 ISSN 0572-2691

Если $i_1 = i_2 \neq 0$, то, используя формулу Ито или (29) при $i_1 = i_2$, $q = \infty$, получаем

$$I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_1)} = \frac{\Delta}{2}(\zeta_0^{(i_1)})^2 \text{ п.н.} \tag{30}$$

Кроме того, положим

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)} = \sqrt{\Delta}\,\zeta_0^{(i_1)}. \tag{31}$$

Формулы (29)–(31) позволяют численно моделировать 1.0-минимальную совокупность стохастических интегралов.

Из (8) и (29) получаем

$$M\{(I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)} - I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)q})^2\} = \frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right). \tag{32}$$

Одним из требований, обеспечивающих сильную сходимость порядка 1.0 метода Г.Н. Мильштейна, является выполнение такого условия [5–7, 14, 15]:

$$M\{(I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)} - I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)q})^2\} \leq C\Delta^3, \tag{33}$$

где постоянная C не зависит от Δ и считается заданной. Объединяя (32), (33), приходим к следующему условию для определения минимального числа q:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right) \leq C\Delta. \tag{34}$$

Численное моделирование 1.5-минимальной совокупности стохастических интегралов. Для того чтобы численно смоделировать 1.5-минимальную совокупность стохастических интегралов, необходимо дополнить (29)–(31) формулами для аппроксимаций стохастических интегралов

$$I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)},\ I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)},\ i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m.$$

Имеем следующие соотношения:

$$I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right) \text{ п.н.}, \tag{35}$$

$$I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)q_1} = \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{ijk}\,\zeta_k^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_i^{(i_3)}, \tag{36}$$

где

$$C_{ijk} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{z}\int_{\tau_p}^{y}\Phi_k(x)\,dx\,\Phi_j(y)\,dy\,\Phi_i(z)\,dz.$$

Нетрудно видеть, что

$$C_{ijk} = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{8} \Delta^{3/2}\, \overline{C}_{ijk},$$

где

$$\overline{C}_{ijk} = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{z} \int\limits_{-1}^{y} P_k(x)\, dx\, P_j(y)\, dy\, P_i(z)\, dz.$$

Формула для разложения интеграла $I^{*(i_3 i_2 i_1)}_{000_{T,t}}$ при произвольных i_1, i_2, i_3, полученная с помощью полиномов Лежандра, достаточно сложна (см. Приложение). Число q_1 в (36) может быть небольшим, в то время как погрешность среднеквадратической аппроксимации, определяемая при $i_1 \neq i_2$, $i_1 \neq i_3$, $i_2 \neq i_3$ формулой

$$\Delta^3 \left(\frac{1}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} \widetilde{C}^{\,2}_{ijk} \right), \quad \widetilde{C}_{ijk} = C_{ijk} / \Delta^{3/2}, \tag{37}$$

будет вполне приемлемой.

Таблица 1

j	k = 0	1	2	3	4	5
			$\overline{C}_{0jk}$			
0	4/3	-2/3	2/15	0	0	0
1	0	2/15	-2/15	4/105	0	0
2	-4/15	2/15	2/105	-2/35	2/105	0
3	0	-2/35	2/35	2/315	-2/63	8/693
4	0	0	-8/315	2/63	2/693	-2/99
5	0	0	0	-10/693	2/99	2/1287
			$\overline{C}_{1jk}$			
0	2/3	-4/15	0	2/105	0	0
1	2/15	0	-4/105	0	2/315	0
2	-2/15	8/105	0	-2/105	0	4/1155
3	-2/35	0	8/315	0	-38/3465	0
4	0	-4/315	0	46/3465	0	-64/9009
5	0	0	-4/693	0	74/9009	0
			$\overline{C}_{2jk}$			
0	2/15	0	-4/105	0	2/315	0
1	2/15	-4/105	0	-2/315	0	8/3465
2	2/105	0	0	0	-2/495	0
3	-2/35	8/315	0	-2/3465	0	-116/45045
4	-8/315	0	4/495	0	-2/6435	0
5	0	-4/693	0	38/9009	0	-8/45045

ISSN 0572-2691

Положим $q_1 = 5$. В табл. 1 и 2 приведены точные значения коэффициентов $\overline{C}_{ijk}$ при $i, j, k = 0, 1, \ldots, 5$ (правильность вычислений здесь и далее контролировалась с помощью символьного пакета математических преобразований DERIVE). Вычисляя значение выражения (37) при $q_1 = 5$ и учитывая требование вида

$$M\{(I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)} - I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)q_1})^2\} \leqslant C\Delta^4,$$

обеспечивающее сильную сходимость порядка 2.0 численной схемы, в которую входят рассматриваемые стохастические интегралы [5–7, 14, 15], при $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3$, $i_1 \neq i_3$ получаем

$$0.0230976 \leqslant C\Delta, \tag{38}$$

где C, например, равно 1.

Теперь условие (34), в силу требования, обеспечивающего сильную сходимость порядка 2.0 численной схемы, должно быть заменено условием

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{4i^2 - 1}\right) \leqslant C\Delta^2. \tag{39}$$

Таблица 2

j	k: 0	1	2	3	4	5
			$\overline{C}_{3jk}$			
0	0	2/105	0	-4/315	0	2/693
1	4/105	0	-2/315	0	-8/3465	0
2	2/35	-2/105	0	4/3465	0	-74/45045
3	2/315	0	-2/3465	0	16/45045	0
4	-2/63	46/3465	0	-32/45045	0	2/9009
5	-10/693	0	38/9009	0	-4/9009	0
			$\overline{C}_{4jk}$			
0	0	0	2/315	0	-4/693	0
1	0	2/315	0	-8/3465	0	-10/9009
2	2/105	0	-2/495	0	4/6435	0
3	2/63	-38/3465	0	16/45045	0	2/9009
4	2/693	0	-2/6435	0	0	0
5	-2/99	74/9009	0	-4/9009	0	-2/153153
			$\overline{C}_{5jk}$			
0	0	0	0	2/693	0	-4/1287
1	0	0	8/3465	0	-10/9009	0
2	0	4/1155	0	-74/45045	0	16/45045
3	8/693	0	-116/45045	0	2/9009	0
4	2/99	-64/9009	0	2/9009	0	4/153153
5	2/1287	0	-8/45045	0	-2/153153	0

Если $i_1 = i_2 = i_3$, то с помощью формулы Ито получим

$$I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_1 i_1)} = \frac{\Delta^3}{6}(\zeta_0^{(i_1)})^3 \text{ п.н.} \tag{40}$$

В том случае, когда $i_1 = i_2 \neq i_3$, $i_1 = i_3 \neq i_2$, $i_2 = i_3 \neq i_1$, существенная часть слагаемых в формуле (36) будет отсутствовать в силу симметрии. Формулы типа (8) или (37) могут быть получены и для $i_1 = i_2 \neq i_3$; $i_1 = i_3 \neq i_2$; $i_2 = i_3 \neq i_1$. Можно показать, что в данном случае минимальное число q_1 будет меньше, чем при $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3$, $i_1 \neq i_3$.

Численное моделирование 2.0-минимальной совокупности стохастических интегралов. 2.0-минимальная совокупность включает помимо стохастических интегралов, образующих 1.5-минимальную совокупность, следующие стохастические интегралы:

$$I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)},\ I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)},\ I_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)};\ i_1,\ldots,i_4 = 1,\ldots,m.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)q_2} = -\frac{\Delta^2}{4}\Biggl(&\frac{4}{3}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_1^{(i_1)} + \frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_2^{(i_1)} - \\
&-\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} + \sum_{i=1}^{q_2}\Biggl\{\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)} - \\
&-\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} + \\
&+\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}\,(2i+3)}\left((i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)} - (i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}\right)\Biggr\}\Biggr),
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)q_2} = -\frac{\Delta^2}{4}\Biggl(&\frac{2}{3}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)} + \\
&+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_1^{(i_1)} - \frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} + \sum_{i=1}^{q_2}\Biggl(-\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)} + \\
&+\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}\,(2i+3)}\times \\
&\times\left((i+1)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)} - (i+2)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}\right) + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}\Biggr)\Biggr).
\end{aligned} \tag{42}$$

Кроме того, по формуле Ито получаем

$$I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_1)} + I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{\Delta^2}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right)\zeta_0^{(i_1)} \text{ п.н.} \tag{43}$$

 ISSN 0572-2691

Теперь при $i_1 \neq i_2$ имеем следующее условие:

$$M\{(I^{*(i_2 i_1)}_{10\,\tau_{p+1},\tau_p} - I^{*(i_2 i_1)q_2}_{10\,\tau_{p+1},\tau_p})^2\} = M\{(I^{*(i_2 i_1)}_{01\,\tau_{p+1},\tau_p} - I^{*(i_2 i_1)q_2}_{01\,\tau_{p+1},\tau_p})^2\} =$$

$$= \frac{\Delta^4}{16}\left(\frac{7}{9} - \sum_{i=1}^{q_2}\left(\frac{1}{4i^2-1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(i+2)^2+(i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right)\right) \leq C\Delta^5. \quad (44)$$

Величина $C\Delta^5$ в правой части (44) продиктована условием, обеспечивающим сильную сходимость порядка 2.0 численной схемы, в которую входят рассматриваемые стохастические интегралы [5–7, 14, 15].

Изучим случай $i_1 = i_2$. В [14, 15] доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть W_t — стандартный винеровский процесс, а $\{\Phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t, T])$. Тогда

$$M\{\prod_{i=1}^{2k}\int_t^T \Phi_{r_i}(\tau)\,dW_\tau\} = \begin{cases}(2g+1)!! \text{ при } \{r_1,\dots,r_{2k}\} = \{q_1, q_1, \dots, q_k, q_k\},\\ 0 \text{ в противном случае,}\end{cases}$$

где g — количество совпадений чисел в наборе $\{q_1,\dots,q_k\}$; $g \geq 0$; $r_i = 0, 1, 2, \dots$; $r_i \neq r_j\ (i \neq j)$; $i, j = 1, \dots, 2k$.

Используя лемму 1, получаем при $i_1 = i_2$ следующую формулу:

$$M\{(I^{*(i_1 i_1)}_{10\,\tau_{p+1},\tau_p} - I^{*(i_1 i_1)q_2}_{10\,\tau_{p+1},\tau_p})^2\} = M\{(I^{*(i_1 i_1)}_{01\,\tau_{p+1},\tau_p} - I^{*(i_1 i_1)q_2}_{01\,\tau_{p+1},\tau_p})^2\} =$$

$$= \frac{\Delta^4}{16}\left(\sum_{i=q_2+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=q_2+1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\right)^2\right) \leq C\Delta^5.$$

Перейдем к рассмотрению аппроксимации стохастического интеграла $I^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{0000\,\tau_{p+1},\tau_p}$. Имеем

$$I^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)q_3}_{0000\,\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i,j,k,l=0}^{q_3} C_{ijkl}\,\zeta_l^{(i_1)}\zeta_k^{(i_2)}\zeta_j^{(i_3)}\zeta_i^{(i_4)}, \quad (45)$$

где

$$C_{ijkl}=\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int\limits_{\tau_p}^{u}\int\limits_{\tau_p}^{z}\int\limits_{\tau_p}^{y}\Phi_l(x)\,dx\,\Phi_k(y)\,dy\,\Phi_j(z)\,dz\,\Phi_i(u)\,du=$$

$$=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)}}{16}\Delta^2\,\overline{C}_{ijkl},$$

$$\overline{C}_{ijkl}=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{u}\int\limits_{-1}^{z}\int\limits_{-1}^{y}P_l(x)\,dx\,P_k(y)\,dy\,P_j(z)\,dz\,P_i(u)\,du.$$

Выберем, например, $q_3=2$. В табл. 3 приведены точные значения коэффициентов $\overline{C}_{ijkl}$, $i,j,k,l=0,1,2$. При попарно различных i, j, k, l имеем следующее соотношение для выбора шага интегрирования Δ при $q_3=2$:

$$\Delta^4\left(\frac{1}{24}-\sum_{i,j,k,l=0}^{q_3}\tilde{C}^{\,2}_{ijkl}\right)\leqslant C\Delta^5;\ \tilde{C}_{ijkl}=C_{ijkl}/\Delta^2. \tag{46}$$

Таблица 3

k	l = 0	1	2	k	l = 0	1	2	k	l = 0	1	2
	$\overline{C}_{00kl}$				$\overline{C}_{01kl}$				$\overline{C}_{21kl}$		
0	2/3	-2/5	2/15	0	2/15	-2/45	-2/105	0	2/21	-2/45	2/315
1	-2/15	2/15	-2/21	1	2/45	-2/105	2/315	1	2/315	2/315	-2/225
2	-2/15	2/35	2/105	2	-2/35	2/63	-2/315	2	-2/105	2/225	2/1155
	$\overline{C}_{10kl}$				$\overline{C}_{11kl}$				$\overline{C}_{12kl}$		
0	2/5	-2/9	2/35	0	2/15	-2/35	0	0	-2/35	2/45	-2/105
1	-2/45	2/35	-2/45	1	2/105	0	-2/315	1	2/63	-2/105	2/225
2	-2/21	2/45	2/315	2	-4/105	2/105	0	2	2/105	-2/225	-2/3465
	$\overline{C}_{02kl}$				$\overline{C}_{20kl}$				$\overline{C}_{22kl}$		
0	-2/15	2/21	-4/105	0	2/15	-2/35	0	0	2/105	-2/315	0
1	2/35	-4/105	2/105	1	2/105	0	-2/315	1	2/315	0	-2/1155
2	4/105	-2/105	0	2	-4/105	2/105	0	2	0	2/3465	0

Вычисляя с помощью результатов, приведенных в табл. 3, левую часть (46), получаем

$$0.0236084\leqslant C\Delta. \tag{47}$$

Рассмотрим случай $i_1=i_2=i_3=i_4$. С помощью формулы Ито имеем

$$I^{*(i_1 i_1 i_1 i_1)}_{0000\,\tau_{p+1},\tau_p}=\frac{\Delta^2}{24}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^4 \text{ п.н.}$$

ISSN 0572-2691

Если i_1, i_2, i_3, i_4 таковы, что не выполнены требования:

1) $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$,

2) $i_l \neq i_k\ (l \neq k), l, k = 1, 2, 3, 4$,

то часть слагаемых в правой части (45) будут отсутствовать в силу симметрии. Кроме того, в этом случае число q_3 может быть выбрано меньшим, чем в случае попарно различных i_1, i_2, i_3, i_4.

Численное моделирование 2.5-минимальной совокупности стохастических интегралов. 2.5-минимальная совокупность включает, кроме стохастических интегралов, образующих 2.0-минимальную совокупность, следующие стохастические интегралы: $I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)}$, $I_{0\,0\,1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{0\,1\,0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{1\,0\,0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}$, $i_1, \ldots, i_5 = 1, \ldots, m$.

Далее имеем:

$$I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)} = \frac{\Delta^{5/2}}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\right) \text{ п.н.},$$

$$I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)\,q_4} = \sum_{i,j,k=0}^{q_4} C_{ijk}^{001}\, \zeta_k^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_i^{(i_3)},$$

$$I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)\,q_5} = \sum_{i,j,k=0}^{q_5} C_{ijk}^{010}\, \zeta_k^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_i^{(i_3)},$$

$$I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)\,q_6} = \sum_{i,j,k=0}^{q_6} C_{ijk}^{100}\, \zeta_k^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_i^{(i_3)},$$

$$I_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)\,q_7} = \sum_{i,j,k,l,r=0}^{q_7} C_{ijklr}\, \zeta_r^{(i_1)}\zeta_l^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_j^{(i_4)}\zeta_i^{(i_5)},$$

где

$$C_{ijk}^{001} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{z}\int_{\tau_p}^{y} \Phi_k(x)\,dx\,\Phi_j(y)\,dy\,(\tau_p - z)\,\Phi_i(z)\,dz,$$

$$C_{ijk}^{010} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{z}\int_{\tau_p}^{y} \Phi_k(x)\,dx\,\Phi_j(y)\,(\tau_p - y)\,dy\,\Phi_i(z)\,dz,$$

$$C_{ijk}^{100} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{z}\int_{\tau_p}^{y} \Phi_k(x)\,(\tau_p - x)\,dx\,\Phi_j(y)\,dy\,\Phi_i(z)\,dz,$$

$$C_{ijklr} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int_{\tau_p}^{v}\int_{\tau_p}^{u}\int_{\tau_p}^{z}\int_{\tau_p}^{y} \Phi_r(x)\,dx\,\Phi_l(y)\,dy\,\Phi_k(z)\,dz\,\Phi_j(u)\,du\,\Phi_i(v)\,dv.$$

Нетрудно видеть, что

$$C_{ijk}^{001}=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16}\Delta^{5/2}\,\overline{C}_{ijk}^{001},$$

$$C_{ijk}^{010}=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16}\Delta^{5/2}\,\overline{C}_{ijk}^{010},$$

$$C_{ijk}^{100}=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16}\Delta^{5/2}\,\overline{C}_{ijk}^{100},$$

$$C_{ijklr}=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)(2r+1)}}{32}\Delta^{5/2}\,\overline{C}_{ijklr},$$

где

$$\overline{C}_{ijk}^{100}=-\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{z}\int\limits_{-1}^{y}P_k(x)(x+1)\,dx\,P_j(y)\,dy\,P_i(z)\,dz,$$

$$\overline{C}_{ijk}^{010}=-\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{z}\int\limits_{-1}^{y}P_k(x)\,dx\,P_j(y)(y+1)\,dy\,P_i(z)\,dz,$$

$$\overline{C}_{ijk}^{001}=-\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{z}\int\limits_{-1}^{y}P_k(x)\,dx\,P_j(y)\,dy\,P_i(z)(z+1)\,dz,$$

$$\overline{C}_{ijklr}=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{v}\int\limits_{-1}^{u}\int\limits_{-1}^{z}\int\limits_{-1}^{y}P_r(x)\,dx\,P_l(y)\,dy\,P_k(z)\,dz\,P_j(u)\,du\,P_i(v)\,dv.$$

Выберем $q_4=q_5=q_6=2$, $q_7=1$. В табл. 4, 5 приведены точные значения коэффициентов $\overline{C}_{ijk}^{100}$, $\overline{C}_{ijk}^{010}$, $\overline{C}_{ijk}^{001}$, $i,j,k=0,1,2$; $\overline{C}_{ijklr}$, $i,j,k,l,r=0,1$.

В случае попарно различных i,j,k,l,r имеем:

$$\Delta^5\left(\frac{1}{60}-\sum_{i,j,k=0}^{2}\left(\widetilde{C}_{ijk}^{100}\right)^2\right)\le C\Delta^6;\ \ \widetilde{C}_{ijk}^{100}=C_{ijk}^{100}/\Delta^{5/2},\tag{48}$$

$$\Delta^5\left(\frac{1}{20}-\sum_{i,j,k=0}^{2}\left(\widetilde{C}_{ijk}^{010}\right)^2\right)\le C\Delta^6;\ \ \widetilde{C}_{ijk}^{010}=C_{ijk}^{010}/\Delta^{5/2},\tag{49}$$

$$\Delta^5\left(\frac{1}{10}-\sum_{i,j,k=0}^{2}\left(\widetilde{C}_{ijk}^{001}\right)^2\right)\le C\Delta^6;\ \ \widetilde{C}_{ijk}^{001}=C_{ijk}^{001}/\Delta^{5/2},\tag{50}$$

$$\Delta^5\left(\frac{1}{120}-\sum_{i,j,k,l,r=0}^{1}\left(\widetilde{C}_{ijklr}\right)^2\right)\le C\Delta^6;\ \ \widetilde{C}_{ijklr}=C_{ijklr}/\Delta^{5/2}.\tag{51}$$

ISSN 0572-2691

Таблица 4

j	k			j	k			j	k		
	0	1	2		0	1	2		0	1	2
$\bar{C}^{001}_{0jk}$				$\bar{C}^{100}_{0jk}$				$\bar{C}^{010}_{0jk}$			
0	-2	14/15	-2/15	0	-2/3	2/15	2/15	0	-4/3	8/15	0
1	-2/15	-2/15	6/35	1	-2/15	-2/45	2/35	1	-4/15	0	8/105
2	2/5	-22/105	-2/105	2	2/15	-2/35	-4/105	2	4/15	-16/105	0
$\bar{C}^{001}_{1jk}$				$\bar{C}^{100}_{1jk}$				$\bar{C}^{010}_{1jk}$			
0	-6/5	22/45	-2/105	0	-2/5	2/45	2/21	0	-4/5	4/15	4/105
1	-2/9	-2/105	26/315	1	-2/15	-2/105	4/105	1	-4/15	4/105	4/105
2	22/105	-38/315	-2/315	2	2/35	-2/63	-2/105	2	4/35	-8/105	0
$\bar{C}^{001}_{2jk}$				$\bar{C}^{100}_{2jk}$				$\bar{C}^{010}_{2jk}$			
0	-2/5	2/21	4/105	0	-2/15	-2/105	4/105	0	-4/15	4/105	4/105
1	-22/105	4/105	2/105	1	-2/21	-2/315	2/105	1	-4/21	4/105	4/315
2	0	-2/105	0	2	-2/105	-2/315	0	2	-4/105	0	0

Таблица 5

l	r		l	r	
	0	1		0	1
$\bar{C}_{000lr}$			$\bar{C}_{001lr}$		
0	4/15	-8/45	0	0	4/315
1	-4/45	8/105	1	8/315	-2/105
$\bar{C}_{010lr}$			$\bar{C}_{100lr}$		
0	4/45	-16/315	0	8/45	-4/35
1	-4/315	4/315	1	-16/315	2/45
$\bar{C}_{110lr}$			$\bar{C}_{101lr}$		
0	8/105	-2/45	0	4/315	0
1	-4/315	4/315	1	4/315	-8/945
$\bar{C}_{011lr}$			$\bar{C}_{111lr}$		
0	8/315	-4/315	0	2/105	-8/945
1	0	2/945	1	2/945	0

Происхождение величины $C\Delta^6$ в правых частях (48)–(51) обусловлено требованием, обеспечивающим сильную сходимость порядка 2.5 численного метода, в который входят моделируемые стохастические интегралы [5–7, 14, 15]. Соотношения (48)–(51) позволяют оценить допустимый минимальный шаг интегрирования Δ при $q_4 = q_5 = q_6 = 2$, $q_7 = 1$. Если выберем q_4, q_5, $q_6 > 2$, $q_7 > 1$, то, очевидно, допустимый минимальный шаг интегрирования Δ станет меньше. Используя результаты, приведенные в табл. 4, 5, перепишем (48)–(51) соответственно в виде

$$0.00815429 \leq C\Delta,\ 0.0173903 \leq C\Delta,$$

$$0.0252801 \leq C\Delta,\ 0.00759105 \leq C\Delta.$$

В заключение отметим, что при моделировании γ-минимальной ($\gamma = 1.0,\ 1.5,\ 2.0,\ 2.5$) совокупности стохастических интегралов минимальная длина последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин $\zeta_j^{(i)}$, необходимая для каждого стохастического интеграла из γ-минимальной совокупности, должна определяться требованием, обеспечивающим сильную сходимость порядка γ рассматриваемого численного метода [5–7, 14, 15]. Это требование заключается в том, что вторые моменты погрешностей аппроксимаций всех стохастических интегралов, входящих в γ-минимальную совокупность, не должны превосходить $C\Delta^{\gamma+1}$ [5–7, 14, 15], где постоянная C не зависит от Δ и считается заданной.

Приложение

Формула для стохастического интеграла $I^{*(i_3 i_2 i_1)}_{000_{T,t}}$ $(T > t)$ имеет следующий вид:

$$I^{*(i_3 i_2 i_1)}_{000_{T,t}} = -\frac{1}{T-t}\left(I^{*(i_1)}_{0_{T,t}} I^{*(i_2 i_3)}_{10_{T,t}} + I^{*(i_3)}_{0_{T,t}} I^{*(i_2 i_1)}_{10_{T,t}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2} I^{*(i_1)}_{0_{T,t}}\left(I^{*(i_3 i_2)}_{00_{T,t}} - I^{*(i_2 i_3)}_{00_{T,t}}\right) + \frac{1}{6}(T-t)^{3/2}\zeta_0^{(i_1)} \times \qquad (52)$$

$$\times\left\{\zeta_0^{(i_3)}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)} - \sqrt{3}\,\zeta_1^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_2)}\right) + \zeta_1^{(i_3)}\zeta_1^{(i_2)}\right\} + D^{(i_3 i_2 i_1)}_{T,t},$$

где

$$D^{(i_3 i_2 i_1)}_{T,t} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{\substack{j=0\\ k+j-i=2p\ge 0,\ p\in Z}}^{k+1}\sum_{i=0}^{\infty} L_{ijk} K_{j,k+1,\frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} +\right.$$

$$+\sum_{\substack{j=k+2\\ k+j-i=2p\ge 0,\ p\in Z}}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} L_{ijk} K_{k+1,j,\frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\left(\sum_{\substack{j=0\\ k+j-i=2p\ge 2,\ p\in Z}}^{k-1}\sum_{i=0}^{\infty} L_{ijk} K_{j,k-1,\frac{k+j-i}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} +\right.$$

$$+\sum_{\substack{j=k\\ k+j-i=2p\ge 2,\ p\in Z}}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} L_{ijk} K_{k-1,j,\frac{k+j-i}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+\sum_{\substack{j=0\\ k+j-i=2p\ge -2,\ p\in Z}}^{k+1}\sum_{i=0}^{\infty} M_{ijk} K_{j,k+1,\frac{k+j-i}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} +$$

$$\left.+\sum_{\substack{j=k+2\\ k+j-i=2p\ge -2,\ p\in Z}}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} M_{ijk} K_{k+1,j,\frac{k+j-i}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}\right) +$$

ISSN 0572-2691

$$+ \sum_{\substack{j=0 \\ k+j-i=2p\geq 0,\ p\in Z}}^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} M_{ijk} K_{j,k-1,\frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$\left. + \sum_{\substack{j=k \\ k+j-i=2p\geq 0,\ p\in Z}}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} M_{ijk} K_{k-1,j,\frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \right],$$

$$L_{ijk} = \sqrt{\frac{2j+1}{(2k+1)(2i+1)}} \frac{1}{2i+3},\ M_{ijk} = \sqrt{\frac{2j+1}{(2k+1)(2i+1)}} \frac{1}{2i-1},$$

$$K_{m,n,k} = \frac{a_{m-k}\, a_k\, a_{n-k}}{a_{m+n-k}} \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1};\ a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!};\ m \leq n.$$

Равенство (52) справедливо в среднем степени n; $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

Д.Ф. Кузнєцов

ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛІНОМІВ ЛЕЖАНДРА ДО СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто апроксимації повторних стохастичних інтегралів Стратоновича за допомогою кратних рядів Фур'є по поліномам Лежандра. Отримано апроксимації стохастичних інтегралів кратності 1–5. Розглянуто середньоквадратичне сходження апроксимації повторних стохастичних інтегралів.

D.F. Kuznetsov

APPLICATION OF LEGENDRE POLYNOMIALS TO MEAN-SQUARE APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

The article is devoted to approximation of multiple Stratonovich stochastic integrals with the help of multiple Fourier series on Legendre polynomials. Approximations of stochastic integrals of multiplicity 1–5 are derived. The mean-square convergence of approximations is considered.

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1962. — 354 с.
2. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. — М.: Фазис, 1998. — Т. 1, 2.
3. *Nyquist H.* Thermal agittation of electric charge in conductors // Physical Rev. — 1928. — 32. — P. 110.
4. *Arato M.* Linear stochastic systems with constant coefficients. A statistical approach. — Berlin: Springer-Verlag, 1982. — 289 p.
5. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. — Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1988. — 228 с.

6. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1992. — 632 p.
7. *Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.* Numerical solution of SDE through computer experiments. — Berlin: Springer-Verlag, 1994. — 292 p.
8. *Мильштейн Г.Н.* Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. — 1974. — 19. — С. 557–562.
9. *Platen E.* A Taylor-Ito formula for semimartingales solving a stochastic differential equation // Springer Lect. Notes Control and Inform. Sci. — 1981. — 36. — P. 157–164.
10. *Platen E., Wagner W.* On a Taylor formula for a class of Ito processes // Prob. Math. Statist. — 1982. — 3. — P. 37–51.
11. *Platen E.* An approximation method for a class of Ito processes with jump component // Lietuvos Matem. Rink. — 1982. — 22. — P. 124–136.
12. *Kloeden P.E., Platen E.* The Stratonovich- and Ito-Taylor expansions // Math. Nachr. — 1991. — 151. — P. 33–50.
13. *Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W.* The approximation of multiple stochastic integrals // Stoch. Anal. and Appl. — 1992. — 4. — P. 431–441.
14. *Кузнецов Д.Ф.* Некоторые вопросы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. — СПб.: Изд-во СПб. ГТУ, 1998. — 203 с.
15. *Кузнецов Д.Ф.* Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. — СПб.: Наука, 1999. — 459 с.
16. *Кузнецов Д.Ф.* Применение методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито к численному моделированию управляемых стохастических систем // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 4. — С. 91–108.
17. *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Унифицированное разложение Тейлора-Ито // Зап. науч. семинаров ПОМИ им. В.А. Стеклова. Вероятность и статистика. 2. — 1997. — 244. — С. 186–204.
18. *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Численные методы моделирования систем управления, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 2. — С. 57–72.
19. *Platen E.* An introduction to numerical methods for stochastic differential equations // Acta Numerica. — 1999. — 8. — P. 195–244.
20. *Кузнецов Д.Ф.* Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах. — СПб., 1997. — 31 с. — (Деп. в ВИНИТИ 10.12.97, № 3607-В97).

Получено 13.10.99

ISSN 0572-2691