



УДК 519.21, 518.61

СЛАБЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО

Copyright © 2000, Д. Ф. Кузнецов

Д. Ф. Кузнецовк.ф.-м.н., Санкт-Петербургский
государственный
технический университет

научный консультант

д.ф.-м.н., проф. Г. Л. Шевляков

Dmitri F. Kuznetsov

В работе получен слабый численный метод 4-го порядка для стохастических дифференциальных уравнений Ито со скалярным неаддитивным шумом. Для построения данного численного метода используется унифицированное разложение Тейлора–Ито ■

The Order 4 Weak Numerical Method for Stochastic Differential Ito Equations with Scalar Nonadditive Noise

Weak numerical method of the fourth order for the stochastic differential Ito equations with scalar non additive noise is proposed. The unified Taylor–Ito expansion is used for the construction of this method ■

Введение

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и неубывающее семейство $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ σ -подалгебр $\mathcal{F}$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) Ито вида

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)dw_t; \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (*)$$

где x_t — решение СДУ; вектор-функции $a(x, t), b(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и начальное условие x_0 удовлетворяют стандартным условиям [1] существования и единственности решения СДУ (*) в смысле стохастической эквивалентности; w_t — $\mathcal{F}_t$ -измеримый при каждом $t \in [0, T]$ скалярный стандартный винеровский процесс. Отметим, что уравнение (*) для случая $b(x, t) \equiv b(t)$ называется уравнением с аддитивным шумом.

Для СДУ Ито различают сильные численные методы, аппроксимирующие решение в среднеквадратическом смысле, и слабые численные методы, которые аппроксимируют функционалы вида $M\{g(x_t)\}$, где g — некоторая гладкая функция, а x_t — решение СДУ. Сильные численные методы предназначены для моделирования отдельных траекторий решения СДУ и используются в задачах построения новых математических моделей, тестирования процедур оценивания параметров стохастических систем, фильтрации марковских цепей с непрерывным временем и конечным пространством состояний и др. [2]. Слабые численные методы применяются при решении задачи Коши для уравнений параболического типа, аппроксимации инвариантных мер и стохастических ляпуновских показателей [2].

Предметом данной статьи является построение слабого численного метода четвертого порядка для СДУ Ито со скалярным неаддитивным шумом.

Приведем определение слабого численного метода порядка γ [2].

Рассмотрим следующее разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0, T]$:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

Определение Дискретная аппроксимация (численный метод) y_{τ_p} ; $p = 0, 1, \dots, N$ решения уравнения (*) называется *стоящейся слабо с порядком $\gamma > 0$ к решению x_t , $t \in [0, T]$ в момент времени T при $\Delta_N \downarrow 0$* , если для любой функции $g(x) \in C^{2(\gamma+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ существует постоянная $C > 0$, которая не зависит от Δ_N , и число $\delta > 0$ такие, что $|M\{g(x_T)\} - M\{g(y_T)\}| \leq C(\Delta_N)^\gamma$ для всех $\Delta_N \in (0, \delta)$.

Здесь $C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые вместе со своими частными производными до порядка r включительно имеют полиномиальный рост (последнее для функции $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ означает, что существуют такие постоянные $C_f > 0$ и $q_f \in \mathbb{N}$, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $|F(x)| \leq C_f(1 + |x|^{2q_f})$).

Один из возможных подходов к построению слабых численных методов для СДУ Ито основан на разложении Тейлора–Ито [5] и специальных (т. н. слабых), аппроксимациях повторных стохастических интегралов Ито, входящих в данное разложение. В случае скалярного винеровского процесса это интегралы вида

$$\int_t^s \cdots \int_t^{\tau_{i+1}} \cdots \int_t^{\tau_2} dp_1 \dots dp_i \dots dp_k, \quad \text{где } \forall i = 1, \dots, k \quad p_i = w_{\tau_i} \text{ либо } p_i = \tau. \quad (**)$$

Построение указанных слабых аппроксимаций является непростой задачей и осуществляется [2], [3], [4] путем искусного подбора таким образом, чтобы эти аппроксимации удовлетворяли достаточно большому числу специфических моментных условий. Поэтому в литературе известны только слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито кратности 1–3. Использование этих аппроксимаций достаточно для построения слабых численных методов порядков 1 и 2 для уравнения (*) общего вида (с векторным неаддитивным шумом), в котором $b(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ и $w_t \in \mathbb{R}^m$ — m -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, методов 3-го порядка для уравнений со скалярным неаддитивным и с векторным аддитивным шумом, а также слабого численного метода 4-го порядка для уравнения (*) со скалярным аддитивным шумом ($b(x, t) \equiv b(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$). В данной работе построено обобщение последнего из указанных численных методов на случай скалярного неаддитивного шума.

Отметим, что известен также подход [2], [4], который позволяет строить слабые численные методы достаточно высоких порядков для СДУ Ито с использованием слабых методов более низких порядков (т. н. экстраполяционные методы). Например, в [2], [4] построены численные методы 4-го порядка на основе методов порядков 1 и 2. Использование таких слабых численных методов сопряжено с необходимостью численно решать на промежутке $[0, T]$ СДУ Ито несколько раз независимо с различными шагами интегрирования. В результате мы либо приходим к заметному увеличению машинного времени, либо к необходимости распараллеливания вычислений. Кроме этого заметим, что слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито определяются достаточно простыми формулами, и поэтому наращивание порядков слабых численных методов, основанных непосредственно на разложении Тейлора–Ито [5], не приводит к заметному увеличению машинного времени при численной реализации. Таким образом, построение слабых численных методов высокого порядка, основанных непосредственно на разложении Тейлора–Ито, представляет самостоятельный интерес.

1. Общее представление слабого численного метода четвертого порядка, основанного на унифицированном разложении Тейлора–Ито

Согласно теореме 14.5.2 ([2], с. 474), для построения слабого численного метода порядка 4 для СДУ Ито (*) можно использовать разложение Тейлора–Ито [5], включающее в себя, подлежащие аппроксимации повторные стохастические интегралы Ито (**) кратностей 1–4. Количество этих стохастических интегралов равно 26.

Отметим, что некоторые интегралы из класса (**) связаны линейными соотношениями, поэтому совокупность (**) не является минимальной необходимой для построения численного метода. В данной работе вместо указанного разложения Тейлора–Ито используется соответствующее ему унифицированное разложение Тейлора–Ито [6], что позволяет существенно упростить задачу построения слабых аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито кратностей 1–4 за счет сокращения их общего количества с 26 до 15. При этом вместо интегралов (**) используются повторные стохастические интегралы вида

$$I_{1 \dots k}(s, t) := \int_t^s (t - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (t - \tau_1)^{l_1} dw_{\tau_1} \dots dw_{\tau_k} \quad (k \geq 1). \quad (1.1)$$

Рассмотрим унифицированное разложение Тейлора–Ито [6], включающее повторные стохастические интегралы Ито кратностей 1–4, отбросим в нем остаточный член в интегральной форме [6] и заменим входящие в него повторные стохастические интегралы Ито на их аппроксимации. В результате получим следующий численный метод с постоянным шагом интегрирования Δ :

$$\begin{aligned} y_{p+1} = & [y_p + \Delta a + b\hat{I}_0] + \left[\frac{\Delta^2}{2} La + G_1 y_p \hat{I}_1 + \Delta G_0 a \hat{I}_0 + G_0 b \hat{I}_{00} \right] + \left[G_0 G_0 b \hat{I}_{000} + \Delta G_1 a \hat{I}_1 + \right. \\ & + \frac{\Delta^2}{2} G_0 La \hat{I}_0 + G_2 y_p \hat{I}_2 + G_1 b \hat{I}_{10} + G_0 G_1 y_p \hat{I}_{01} + \Delta G_0 G_0 a \hat{I}_{00} + \frac{\Delta^3}{6} LLa \left. \right] + \left[\frac{\Delta^4}{24} LLLa + \right. \\ & + \frac{\Delta^3}{6} G_0 LLa \hat{I}_0 + \frac{\Delta^2}{2} G_1 La \hat{I}_1 + \Delta G_2 a \hat{I}_2 + G_3 y_p \hat{I}_3 + G_1 G_1 y_p \hat{I}_{11} + G_2 b \hat{I}_{20} + \end{aligned}$$

$$+ G_0 G_2 y_p \hat{I}_{02} + \Delta G_1 G_0 a \hat{I}_{10} + \Delta G_0 G_1 a \hat{I}_{01} + \frac{\Delta^2}{2} G_0 G_0 L a \hat{I}_{00} + \Delta G_0 G_0 G_0 a \hat{I}_{000} + \\ + G_1 G_0 b \hat{I}_{100} + G_0 G_1 b \hat{I}_{010} + G_0 G_0 G_1 y_p \hat{I}_{001} + G_0 G_0 G_0 b \hat{I}_{0000} \Big]. \quad (1.2)$$

Здесь $\hat{I}_{l_1 \dots l_k}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито (1.1); $L, G_0, \dots, G_3$ — операторы следующего вида:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a^{(i)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n b^{(i)}(x, t) b^{(k)}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^{(i)} \partial x^{(k)}},$$

$$G_0 = \sum_{i=1}^n b^{(i)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}}, \quad G_l = \frac{1}{l} (G_{l-1} L - L G_{l-1}), \quad l = 1, 2, 3,$$

$$G_1 = G_0 L - L G_0,$$

$$G_2 = \frac{1}{2} G_0 L L - L G_0 L + \frac{1}{2} L L G_0,$$

$$G_3 = \frac{1}{6} G_0 L L L - \frac{1}{2} L G_0 L L + \frac{1}{2} L L G_0 L - \frac{1}{6} L L L G_0,$$

причем

$$L y_p = a(y_p, \tau_p), \quad G_0 y_p = b(y_p, \tau_p).$$

Функции $a, b, La, \dots, LLLb$, входящие в (1.2), вычислены в точке (y_p, τ_p) , где $\tau_p = p\Delta$.

В формуле (1.2) члены внутри первой пары квадратных скобок дают метод первого порядка. Если учесть вторую группу членов, то получим метод 2-го порядка и т.д.

Для того, чтобы численный метод (1.2) был слабым численным методом 4-го порядка, необходимо выполнение ряда условий (см. теорему 14.5.2 в [2] на с. 474). Перечислим здесь некоторые из них:

1) функции $a(x, t)$, $b(x, t)$ должны удовлетворять стандартным условиям [1] существования и единственности решения СДУ (*) в смысле стохастической эквивалентности;

2) $a^{(k)}(x, t)$, $b^{(k)}(x, t) \in C^{10}(\mathbb{R}^n \times [0, T], \mathbb{R}^1)$; $k = 1, \dots, n$;

3) при всех $s, t \in [0, T]$ и при всех $l = 1, 2, \dots, 9$ должны выполняться неравенства

$$\left| M \left\{ \prod_{k=1}^l I_{\alpha_k}(s, t) - \prod_{k=1}^l \hat{I}_{\alpha_k}(s, t) \mid \mathcal{F}_t \right\} \right| \leq K(s-t)^5, \quad (1.3)$$

где $\alpha_k \in A$, $A = \{0, 1, 2, 3, 00, 10, 01, 11, 20, 02, 000, 100, 010, 001, 0000\}$, K — некоторая постоянная.

Будем предполагать, что условия 1 и 2 выполнены. Тогда для завершения построения слабого численного метода порядка 4 для СДУ Ито (*) достаточно построить такие аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, которые удовлетворяют условию (1.3).

2. Построение слабых аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито

Отметим, что условие (1.3) оставляет некоторую свободу в выборе аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито. В результате каждая из этих аппроксимаций может быть выбрана не единственным образом. Целью данного параграфа является построение наиболее простых аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (1.3). Понятие простоты здесь связано со сложностью формул, определяющих аппроксимации стохастических интегралов, а также с количеством независимых случайных величин, входящих в эти формулы.

Прежде всего положим

$$\hat{I}_0 = \sqrt{\Delta} \zeta_0, \quad \hat{I}_{00} = \frac{1}{2} \Delta (\zeta_0^2 - 1), \quad \hat{I}_1 = -\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right), \quad (2.1)$$

$$\hat{I}_{000} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{6} (\zeta_0^3 - 3\zeta_0), \quad \hat{I}_{0000} = \frac{\Delta^2}{24} (\zeta_0^4 - 6\zeta_0^2 + 3). \quad (2.2)$$

В этих формулах

$$\zeta_0 := \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} dw_s, \quad \zeta_1 := \frac{2\sqrt{3}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(s - \tau_p - \frac{\Delta}{2} \right) dw_s$$

суть независимые нормально распределенные случайные величины, имеющие нулевое математическое ожидание и дисперсию 1.

Выбор аппроксимаций (2.1), (2.2) обусловлен тем, что они с вероятностью 1 совпадают с соответствующими стохастическими интегралами Ито [2]. Таким образом, соотношение (1.3) для всевозможных произведений $\prod_{k=1}^l \hat{I}_{\alpha_k}$ ($l = 1, 2, \dots, 9$; $\alpha_k = 0, 00, 1, 000$) выполняется автоматически.

Для построения оставшихся аппроксимаций $\hat{I}_{100}, \hat{I}_{010}, \hat{I}_{001}, \hat{I}_{10}, \hat{I}_{01}, \hat{I}_{11}, \hat{I}_{20}, \hat{I}_{02}, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ необходимо вычислить ряд условных математических ожиданий вида $M\{\prod_{k=1}^l I_{\alpha_k}(t + \Delta, t) \mid \mathcal{F}_t\}$ ($\alpha_k \in A$), которые для сокращения записи будут обозначаться через $M\{\prod_{k=1}^l I_{\alpha_k}\}$. При этом мы будем использовать следующее известное свойство стохастических интегралов Ито:

$$M\left\{\int_t^{t+\Delta} g_1(s)dw_s \int_t^{t+\Delta} g_2(s)dw_s \mid \mathcal{F}_t\right\} = \int_t^{t+\Delta} g_1(s)g_2(s)ds, \quad (2.3)$$

где $g_1(s), g_2(s)$ — неслучайные непрерывные функции, а также вытекающие из формулы Ито и справедливые с вероятностью 1 равенства

$$\begin{aligned} I_0^4 &= 24I_{0000} + 12\Delta I_{00} + 3\Delta^2, & I_{00}^2 &= 6I_{0000} + 2\Delta I_{00} + \Delta^2/2, & I_{00}I_0^2 &= 12I_{0000} + 5\Delta I_{00} + \Delta^2, \\ I_0^5 &= 120I_{00000} + 60\Delta I_{000} + 15\Delta^2 I_0, & I_{00}^3 &= 30I_{00000} + 12\Delta I_{000} + 10\Delta^2 I_0/4, \\ I_{10}I_0 &= I_{010} + I_{100} + \Delta I_1 + I_2, & I_{00}I_0^3 &= 60I_{00000} + 27\Delta I_{000} + 6\Delta^2 I_0, \\ I_{0000}I_0 &= 5I_{00000} + \Delta I_{000}, & I_{000}I_0^2 &= 20I_{00000} + 7\Delta I_{000} + \Delta^2 I_0, & I_{000}I_0 &= 4I_{0000} + \Delta I_{00}, \\ I_{000}I_{00} &= 10I_{00000} + 3\Delta I_{000} + \Delta^2 I_0/2, & I_0^3 &= 6I_{000} + 3\Delta I_0, & I_{00}I_1 &= I_{001} + I_{010} + I_{100} - \Delta^2 I_0/2, \\ I_{00}I_0 &= 3I_{000} + \Delta I_0, & I_{01}I_0 &= 2I_{001} + I_{010} - (I_2 + \Delta^2 I_0)/2, & I_0^2 &= 2I_{00} + \Delta, & I_1I_0 &= I_{10} + I_{01} - \Delta^2/2. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения и (2.3), получим

$$\begin{aligned} M\{I_3I_0\} &= -\Delta^4/4, & M\{I_2I_0\} &= \Delta^3/3, & M\{I_2I_0^3\} &= \Delta^4, & M\{I_2I_{00}I_0\} &= \Delta^4/3, \\ M\{I_2I_1\} &= -\Delta^4/4, & M\{I_{20}I_0^2\} &= \Delta^4/6, & M\{I_{20}I_{00}\} &= \Delta^4/12, & M\{I_{11}I_0^2\} &= \Delta^4/4, \\ M\{I_{11}I_{00}\} &= \Delta^4/8, & M\{I_{02}I_0^2\} &= \Delta^4/2, & M\{I_{02}I_{00}\} &= \Delta^4/4, & M\{I_{100}I_{000}\} &= -\Delta^4/24, \\ M\{I_{100}I_0^3\} &= -\Delta^4/4, & M\{I_{100}I_{00}I_0\} &= -\Delta^4/8, & M\{I_{010}I_{000}\} &= -\Delta^4/12, & M\{I_{010}I_0^3\} &= -\Delta^4/2, \\ M\{I_{010}I_{00}I_0\} &= -\Delta^4/4, & M\{I_{001}I_{000}\} &= -\Delta^4/8, & M\{I_{001}I_0^3\} &= -3\Delta^4/4, & M\{I_{001}I_{00}I_0\} &= -3\Delta^4/8, \\ M\{I_{10}I_0^2\} &= -\Delta^3/3, & M\{I_{10}I_{00}\} &= -\Delta^3/6, & M\{I_{10}I_{00}^2\} &= -\Delta^4/3, & M\{I_{10}I_0^4\} &= -2\Delta^4, \\ M\{I_{10}I_{000}I_0\} &= -\Delta^4/6, & M\{I_{10}I_{00}I_0^2\} &= -5\Delta^4/6, & M\{I_{10}^2\} &= \Delta^4/12, & M\{I_{10}I_{01}\} &= \Delta^4/8, \\ M\{I_{10}I_1I_0\} &= 5\Delta^4/24, & M\{I_{01}I_0^2\} &= -2\Delta^3/3, & M\{I_{01}I_{00}\} &= -\Delta^3/3, & M\{I_{01}I_{00}^2\} &= -2\Delta^4/3, \\ M\{I_{01}I_0^4\} &= -4\Delta^4, & M\{I_{01}I_{000}I_0\} &= -\Delta^4/3, & M\{I_{01}I_{00}I_0^2\} &= -5\Delta^4/3, & M\{I_{01}^2\} &= \Delta^4/4, \\ M\{I_{01}I_1I_0\} &= 3\Delta^4/8. \end{aligned}$$

Кроме этого, равны нулю математические ожидания следующих случайных величин:

$$\begin{aligned} I_3, & I_3I_0^2, & I_3I_{00}, & I_2I_0^2, & I_2I_{00}, & I_2I_{000}, & I_2I_{0000}, & I_2I_{00}^2, & I_2I_0^4, & I_2I_{000}I_0, & I_2I_{00}I_0^2, \\ I_2I_{10}, & I_2I_{01}, & I_2I_1I_0, & I_2, & I_\mu, & I_\mu I_0, & I_\mu I_{000}, & I_\mu I_0^3, & I_\mu I_{00}I_0, & I_\mu I_1, & I_\lambda, \\ I_\lambda I_0, & I_\lambda I_0^2, & I_\lambda I_{00}, & I_\lambda I_1, & I_\lambda I_{0000}, & I_\lambda I_{00}^2, & I_\lambda I_0^4, & I_\lambda I_{000}I_0, & I_\lambda I_{00}I_0^2, & I_\lambda I_{10}, & I_\lambda I_{01}, \\ I_\lambda I_1I_0, & I_\rho I_0, & I_\rho I_{000}, & I_\rho I_0^3, & I_\rho I_{00}I_0, & I_\rho I_1, & I_\rho I_{0000}, & I_\rho I_0^5, & I_\rho I_{00}^2I_0, & I_\rho I_{00}I_0^3, & I_\rho I_{100}, \\ I_\rho I_{010}, & I_\rho I_{001}, & I_\rho I_2, & I_\rho^2 I_0, & I_\rho I_{00}I_1, & I_{10}I_{01}I_0, & I_\rho, & I_\rho I_1I_0^2. \end{aligned}$$

Здесь $\mu \in \{02, 11, 20\}$, $\lambda \in \{100, 010, 001\}$, $\rho \in \{10, 01\}$.

Будем искать аппроксимации $\hat{I}_{100}, \hat{I}_{010}, \hat{I}_{001}, \hat{I}_{10}, \hat{I}_{01}, \hat{I}_{11}, \hat{I}_{20}, \hat{I}_{02}, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ в виде многочленов от ζ_0 и ζ_1 с неопределенными коэффициентами. Коэффициенты многочленов подбираются так, чтобы выполнялись приведенные выше моментные соотношения. В результате получим следующие выражения для искомых аппроксимаций повторных стохастических интегралов:

$$\hat{I}_{100} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{24}(\zeta_0^3 - 3\zeta_0), \quad \hat{I}_{010} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{12}(\zeta_0^3 - 3\zeta_0), \quad \hat{I}_{001} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{8}(\zeta_0^3 - 3\zeta_0), \quad \hat{I}_{11} = \frac{\Delta^3}{8}(\zeta_0^2 - 1), \quad (2.4)$$

$$\hat{I}_{20} = \frac{\Delta^3}{12}(\zeta_0^2 - 1), \quad \hat{I}_{02} = \frac{\Delta^3}{4}(\zeta_0^2 - 1), \quad \hat{I}_3 = -\frac{\Delta^{\frac{7}{2}}}{4}\zeta_0, \quad \hat{I}_2 = \frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{3}\left(\zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1\right), \quad (2.5)$$

$$\hat{I}_{10} = \Delta^2 \left(-\frac{1}{6}(\zeta_0^2 - 1) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 + \frac{1}{12\sqrt{2}}(\zeta_1^2 - 1) \right), \quad (2.6)$$

$$\hat{I}_{01} = \Delta^2 \left(-\frac{1}{3}(\zeta_0^2 - 1) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 - \frac{1}{12\sqrt{2}}(\zeta_1^2 - 1) \right), \quad (2.7)$$

где ζ_0, ζ_1 — независимые случайные величины, такие же, как в (2.1), (2.2).

Таким образом, соотношения (1.2), (2.1)–(2.1), (2.4)–(2.7) представляют собой слабый численный метод 4-го порядка для СДУ Ито (*).

3. Численные эксперименты

Эффективность построенного в данной работе численного метода проиллюстрируем на следующем примере.

Рассмотрим скалярное СДУ Ито вида

$$dx_t = ax_t dt + bx_t dw_t, \quad (3.1)$$

где $t \in [0, T]$; a, b — постоянные.

Уравнение (3.1) имеет точное решение $x_t = x_0 \exp((a - b^2/2)t + bw_t)$, причем $M\{x_T\} = M\{x_0\}e^{aT}$.

Уравнение решалось при значениях параметров $a = 1.5$, $b = 0.01$, $x_0 = 1$, $T = 1$ с помощью численного метода (1.2), (2.1)–(2.2), (2.4)–(2.7), а также с помощью слабых численных методов порядков 1 и 2, которые в данном случае имеют соответственно следующий вид [3], [2]:

$$y_{p+1} = y_p + \Delta a + b\hat{I}_0,$$

$$y_{p+1} = y_p + \Delta a + b\hat{I}_0 + \frac{\Delta^2}{2}La + \frac{1}{2}\Delta(Lb + G_0a)\hat{I}_0 + G_0b\hat{I}_{00}.$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в (1.2), а $\hat{I}_0, \hat{I}_{00}$ определяются равенствами (2.1).

Результаты вычислений были обработаны с использованием предложенной в [2] схемы. Данная схема заключается в вычислении оценки $\hat{\mu}_{L,M}$ ошибки μ вида $\mu = M\{x_T\} - M\{y_T^\Delta\}$ по формуле

$$\hat{\mu}_{L,M} = M\{x_T\} - \frac{1}{LM} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^M y_T^{\Delta(k,j)}.$$

При этом независимые реализации (общим числом ML) разбиваются на L групп по M реализаций в каждой. Расчет производится для различных значений шага интегрирования Δ .

Доверительные интервалы для μ с уровнем достоверности $1 - \alpha$ при этих значениях Δ вычисляются по формуле $(\hat{\mu}_{L,M} - \delta\hat{\mu}_{L,M}, \hat{\mu}_{L,M} + \delta\hat{\mu}_{L,M})$, где

$$\delta\hat{\mu}_{L,M} = t_{M-1}^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\mu^2}{M}}, \quad \hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\hat{\mu}_L^{(j)} - \hat{\mu}_{L,M})^2, \quad \hat{\mu}_L^{(j)} = M\{x_T\} - \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L y_T^{\Delta(k,j)}.$$

Коэффициент $t_{M-1}^{1-\alpha}$ определяется из статистических таблиц для t -распределения Стьюдента с $M-1$ степенью свободы и вероятностью α .

В приведенных соотношениях $y_T^{\Delta(k,j)}$ ($k = 1, \dots, L$; $j = 1, \dots, M$) — независимые реализации случайной величины $y_T = y_T^\Delta$, которая получена с помощью рассматриваемого слабого численного метода при постоянном шаге интегрирования Δ и является приближенным значением x_T .

В вычислениях было принято $M = 20$, $L = 100$, $\alpha = 0.1$, $\Delta = 2^{-j}$; $j = 0, 1, \dots, 6$ (от 1 до 64 шагов по времени).

На рис. 1 приведены результаты вычислений для численных методов порядков 1, 2 и 4. Можно видеть, что эффективность метода 4-го порядка особенно высока, когда число шагов по времени невелико. При одном шаге по времени метод дает практически ту же точность, что и метод 2-го порядка при 8 шагах.

Как было указано во введении, одним из возможных применений слабых численных методов является решение задачи Коши для параболических уравнений в частных производных. Известно, что решение такой задачи можно представить в виде математического ожидания некоторого функционала от решения соответствующего данной задаче стохастического дифференциального уравнения.

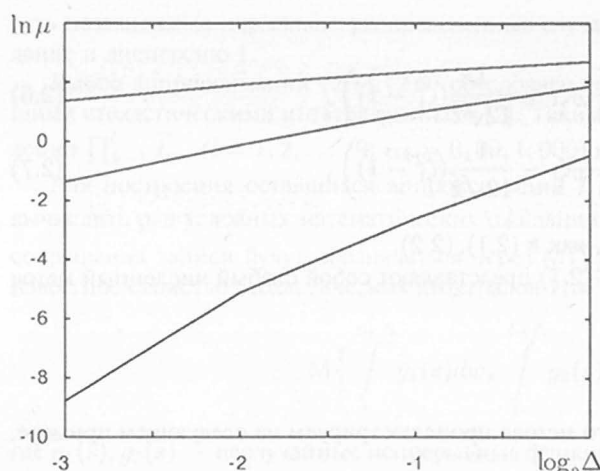


Рис. 1

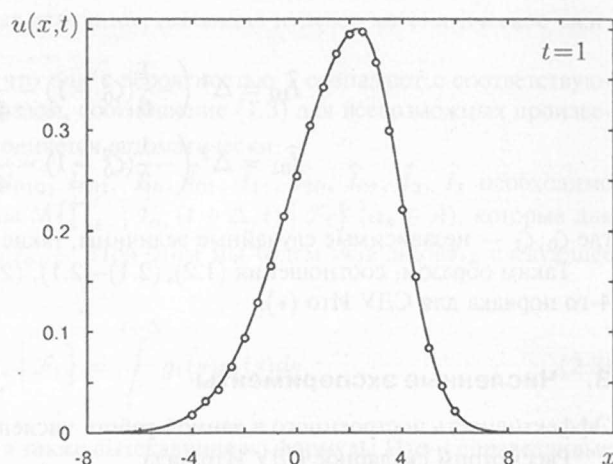


Рис. 2

В качестве примера рассмотрим применение построенного численного метода для решения следующей нелинейной задачи теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((2 - \tanh x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{1 + (x - 1)^8}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0. \quad (3.3)$$

Эта задача моделирует “растекание” начального распределения температуры (3.3) вблизи стыка двух материалов с существенно различными коэффициентами теплопроводности.

Вероятностное представление решения задачи (3.2), (3.3) имеет вид

$$u(x, t) = M\{1/(1 + (\xi_t^{0,x} - 1)^8)\}, \quad (3.4)$$

где $\xi_s := \xi_s^{0,x}$; $0 < s < t$; $t > 0$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито вида

$$d\xi_s = -(\tanh \xi_s)^2 ds + \sqrt{2(2 - \tanh \xi_s)} dw_s; \quad \xi_0 = x,$$

w_s — скалярный стандартный винеровский процесс.

Для реализации соотношения (3.4) воспользуемся методом Монте–Карло и численным методом (1.2), (2.1), (2.2), (2.4)–(2.7):

$$u(x, t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + (y_{t,i}^{0,x} - 1)^8}, \quad (3.5)$$

где $y_t^{0,x}$ — приближенное значение случайной величины $\xi_t^{0,x}$, полученное с помощью численного метода при некотором постоянном шаге интегрирования Δ ; $y_{t,i}^{0,x}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) — независимые реализации случайной величины $y_t^{0,x}$.

При вычислениях по формуле (3.5) полагалось $N = 1000$, $\Delta = 2^{-5}$ (32 шага по времени). На рис. 2 кружками отмечены значения решения задачи (3.2), (3.3) при $t = 1$, полученные по формуле (3.5). Эталонное решение получено с помощью метода конечных элементов.

Литература

1. Гизман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 660 с.
2. Kloeden P. E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 632 p.
3. Мильштейн Г. Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988. 225 с.
4. Kloeden P. E., Platen E., Schurz H. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 292 p.
5. Platen E., Wagner W. On a Taylor formula for a class of Ito processes // Prob. Math. Statist. 1982. V. 3. P. 37–51.
6. Кузнецов Д. Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. СПб.: Наука, 1999. 459 с.

■ Работа выполнена при поддержке министерства общего и профессионального образования РФ. Грант 97-0-1.8-71.

■ Поступила в редакцию 18 января 2000 года; в окончательном варианте 13 ноября 2000 года.