УДК 519.21

Д.Ф. Кузнецов

ТРЕХШАГОВЫЕ СИЛЬНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОРЯДКОВ ТОЧНОСТИ 1.0 И 1.5 ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — полное вероятностное пространство, $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — неубывающее непрерывное справа семейство σ-подалгебр $\mathcal{F}$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито в интегральной форме записи

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)\, ds + \int_0^t B(\mathbf{x}_s, s)\, d\mathbf{w}_s, \qquad (1)$$

здесь $\mathbf{x}_s \in \mathcal{R}^n$ — сильное решение уравнения (1); $\mathbf{w}_s \in \mathcal{R}^m$ — $\mathcal{F}_s$-измеримый при каждом $s \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{w}_s^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$; $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}^n$ — начальное условие, которое стохастически не зависит от приращений $\mathbf{w}_s - \mathbf{w}_0$ при $s > 0$, причем $\mathbf{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$; неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) : \mathcal{R}^n \times [0, T] \to \mathcal{R}^n$, $B(\mathbf{x}, s) : \mathcal{R}^n \times [0, T] \to \mathcal{R}^{n \times m}$ удовлетворяют условиям существования и единственности, в смысле стохастической эквивалентности, сильного решения уравнения (1) [1].

В последние годы наблюдается значительный рост числа работ, посвященных численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений. Это связано с тем, что данные уравнения являются адекватными математическими моделями ряда физических и технических систем [2], а также применяются при решении таких математических задач, как задача фильтрации, задача тестирования процедур оценивания параметров, задача Коши для уравнений в частных производных параболического типа и др. [2].

В настоящей работе рассматриваются пяти- и восьмипараметрические семейства трехшаговых сильных численных методов порядков точности 1.0 и 1.5 соответственно для стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Напомним определение сильного численного метода [2].

Рассмотрим разбиение $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ промежутка $[0, T]$ такое, что

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T, \ \Delta_N = \max_{0 \le p \le N-1} |\tau_{p+1} - \tau_p|.$$

Будем говорить, что дискретная аппроксимация $\mathbf{y}_{\tau_p}$, $p = 0, 1, \ldots, N$, процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, соответствующая максимальному шагу дискретизации Δ_N, сходится сильно с порядком $\gamma > 0$ в момент времени T к процессу $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, при $\Delta_N \downarrow 0$, если существуют постоянная $C > 0$, которая не зависит от Δ_N, и число $\delta > 0$ такие, что $\mathbf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \le C\,(\Delta_N)^\gamma \ \forall\, \Delta_N \in (0, \delta)$.

Целесообразность построения трехшаговых сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито обусловлена двумя причинами. Во-первых, известно [2, 3], что в ряде случаев использование многошаговых

© Д.Ф. КУЗНЕЦОВ, 2002

ISSN 0572-2691

численных методов как для обыкновенных, так и для стохастических дифференциальных уравнений позволяет на каждом шаге интегрирования вычислять или аппроксимировать меньшее количество частных производных от правой части рассматриваемого уравнения, чем при применении одношаговых численных методов таких же порядков точности. Во-вторых, многошаговым численным методам для стохастических дифференциальных уравнений Ито посвящено лишь несколько работ, вследствие чего данные численные методы недостаточно изучены. При этом в литературе среди многошаговых представлены только двухшаговые численные методы для стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Так, в [4] представлен явный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0 для системы двух стохастических дифференциальных уравнений Ито специального вида. Явный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 для стохастического дифференциального уравнения Ито с аддитивным шумом построен в [3]. В [2] получен общий вариант данного численного метода. Неявные сильные двухшаговые численные методы порядков точности 1.0, 1.5 и 2.0 представлены в [2, 5], а порядков точности 2.0 и 2.5 — в [6].

Отметим, что известные в литературе (см. [2–6]) одношаговые и двухшаговые сильные численные методы порядков точности 1.0 и 1.5 для стохастических дифференциальных уравнений Ито получаются при определенном выборе параметров из представленных в настоящей работе параметрических семейств трехшаговых численных методов.

Трехшаговые сильные численные методы порядка точности 1.0. Рассмотрим следующий трехшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0:

$$\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{p+1}} = \alpha_l \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_p} + \beta_l \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{p-1}} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{p-2}} +$$

$$+ \Delta[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) +$$

$$+ (3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})] + \tag{2}$$

$$+ (1-\alpha_l)\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}} + \mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p},$$

где $l = 1, 2, \ldots, n$; $p = 2, 3, \ldots, N-1$; $\mathbf{g}^{(l)}$ — l-я компонента вектора $\mathbf{g}$; α_l, $\beta_l \in [0, 1]$, $\alpha_l + \beta_l \le 1$, δ_l, μ_l, ν_l — численные параметры; $\tau_p = p\Delta$, $\Delta \in (0,1)$; $T = N\Delta$;

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i=1}^{m} B_i(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)\hat{I}^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{j,i=1}^{m} G^{(j)}B_i(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)\hat{I}^{(ji)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p} \tag{3}$$

Здесь $\hat{I}^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p}, \hat{I}^{(ji)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито

$$I^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} d\mathbf{w}^{(i)}_\tau, \quad I^{(ji)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{s} d\mathbf{w}^{(j)}_\theta d\mathbf{w}^{(i)}_s$$

соответственно; B_i — i-й столбец матрицы B;

$$G^{(j)} = \sum_{l=1}^{n} B^{(lj)}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(l)}}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где $B^{(lj)}$ — компонента матрицы B

Для старта численной схемы (2), (3) необходимо знать величины $\mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}, \mathbf{y}_{\tau_2}^{(l)}$, $l = 1,...,n$. Они могут быть вычислены с помощью явного сильного одношагового численного метода порядка точности 1.0 [2, 3, 5, 6] (численный метод (2), (3) при $\alpha_l = \mu_l = 1$, $\beta_l = \delta_l = \nu_l = 0$). Для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито, входящих в правую часть (2), можно, например, воспользоваться формулами из [2, 3, 6–9].

Докажем сходимость численного метода (2), (3).

Теорема. Пусть $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$, $s, t \in [0, T]$, $s > t$, $p = 0, 1,..., N-1$, $i, j, k = 1,..., m$, $l = 1,..., n$, и некоторых, не зависящих от Δ постоянных K_1, K_2, K_3, C_1, C_2 выполнены следующие условия:

1) $\mathbf{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$;

2) $\mathbf{M}\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\} + \mathbf{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_1} - \mathbf{y}_{\tau_1}|^2\} + \mathbf{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_2} - \mathbf{y}_{\tau_2}|^2\} \le C_1\Delta^2$;

3) $|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| \le K_1|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $|B_i(\mathbf{x}, t) - B_i(\mathbf{y}, t)| \le K_1|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$,

$$|G^{(j)}B_i(\mathbf{x}, t) - G^{(j)}B_i(\mathbf{y}, t)| \le K_1|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |L\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| \le K_2(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|G^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |B_i(\mathbf{x}, t)| \le K_2(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|LB_i(\mathbf{x}, t)| \le K_2(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|G^{(j)}B_i(\mathbf{x}, t)| + |L\,G^{(j)}B_i(\mathbf{x}, t)| \le K_2(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|G^{(k)}G^{(j)}B_i(\mathbf{x}, t)| \le K_2(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| \le K_3(1 + |\mathbf{x}|)\sqrt{s - t},$$

$$|B_i(\mathbf{x}, s) - B_i(\mathbf{x}, t)| \le K_3(1 + |\mathbf{x}|)\sqrt{s - t},$$

$$|G^{(j)}B_i(\mathbf{x}, s) - G^{(j)}B_i(\mathbf{x}, t)| \le K_3(1 + |\mathbf{x}|)\sqrt{s - t};$$

4) $\mathbf{M}\{(I_{(0)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} - \hat{I}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)})^2\} \le C_2\Delta^3$,

$\mathbf{M}\{(I_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}^{(ji)} - \hat{I}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}^{(ji)})^2\} \le C_2\Delta^3$;

5) $\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]$, $\alpha_l + \beta_l \le 1$, $|\delta_l| + |\mu_l| + |\nu_l| < \infty$.

Тогда справедлива оценка $\mathbf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \le C\Delta$, где C — постоянная, которая не зависит от Δ; $\mathbf{y}_{\tau_1}$, $\mathbf{y}_{\tau_2}$, $\mathbf{y}_T$ определяются численной схемой (2), (3),

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l,i=1}^{n}B^{(lj)}(\mathbf{x}, t)B^{(ij)}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^{(l)}\,\partial \mathbf{x}^{(i)}}.$$

Доказательство. С использованием формулы Ито получаем

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{x}_{\tau_p} + \Delta\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p} \text{ п.н.}, \tag{4}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p} \text{ п.н.} \tag{5}$$

ISSN 0572-2691

Здесь

$$\mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)\,ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} G^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)\,d\mathbf{w}_s^{(i)},$$

$$\mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i=1}^{m} B_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i,j=1}^{m} G^{(j)} B_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I^{(ji)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$\mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(\int_{\tau_p}^{s} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta)\,d\theta + \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_p}^{s} G^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta)\,d\mathbf{w}_\theta^{(i)} \right) ds +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{s} \left(\int_{\tau_p}^{\theta} LG^{(j)} B_i(\mathbf{x}_u, u)\,du + \sum_{k=1}^{m} \int_{\tau_p}^{\theta} G^{(k)} G^{(j)} B_i(\mathbf{x}_u, u)\,d\mathbf{w}_u^{(k)} \right) \times$$

$$\times d\mathbf{w}_\theta^{(j)} d\mathbf{w}_s^{(i)} + \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{s} LB_i(\mathbf{x}_\theta, \theta)\,d\theta\,d\mathbf{w}_s^{(i)}.$$

Применяя формулы (4), (5), нетрудно прийти к следующему представлению:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{p+1}} &= \alpha_l \mathbf{x}^{(l)}_{\tau_p} + \beta_l \mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{p-1}} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{p-2}} + \\
&+ \Delta[\delta_l\, \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l\, \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l\, \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \\
&+ (3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l)\, \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})] + \\
&+ (1-\alpha_l)\, \mathbf{d}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{d}^{(l)}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}} + \mathbf{d}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \\
&+ Q^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p,\tau_{p-1},\tau_{p-2}} \text{ п.н.},
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
Q^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p,\tau_{p-1},\tau_{p-2}} &= \mathbf{h}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} + (1-\alpha_l)\mathbf{h}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{h}^{(l)}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}} - \\
&- \Delta[\delta_l\, \mathbf{r}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} + (\delta_l+\mu_l-1)\mathbf{r}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} + (\alpha_l+\delta_l+\mu_l+\nu_l-2)\,\mathbf{r}^{(l)}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}];
\end{aligned}$$

остальные обозначения, входящие в (6), такие же, как и в (2).

Положим

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(l)}_s &= \alpha_l \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_p} + \beta_l \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{p-1}} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{p-2}} + \\
&+ (s-\tau_p)\delta_l\, \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s) + \Delta[\mu_l\, \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l\, \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \\
&+ (3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l)\, \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})] +
\end{aligned} \tag{7}$$

$$+(1-\alpha_l)\,\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}}+(1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}+\mathbf{v}^{(l)}_{s,\tau_p}.$$

Здесь $s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$, $p = 2, 3, \ldots, N-1$, т.е. (7) переходит в (2) при $s = \tau_{p+1}$.

Вычитая (7) из (6) при $\tau_{p+1} = s$, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(l)}_s-\mathbf{y}^{(l)}_s&=\alpha_l(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{n_s}}-\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{n_s}})+\beta_l(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{n_s-1}}-\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{n_s-1}})+\\&+(1-\alpha_l-\beta_l)(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{n_s-2}}-\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{n_s-2}})+U^{(l)}_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}},\end{aligned}\tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}U^{(l)}_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}}&=(s-\tau_p)\delta_l\,(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s,s)-\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s,s))+\\&+\Delta[\mu_l(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s}},\tau_{n_s})-\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s}},\tau_{n_s}))+\\&+\nu_l(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}},\tau_{n_s-1})-\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}},\tau_{n_s-1}))+\\&+(3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l)(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-2}},\tau_{n_s-2})-\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s-2}},\tau_{n_s-2}))]+\\&+(1-\alpha_l)(\mathbf{d}^{(l)}_{\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}}-\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}})+(1-\alpha_l-\beta_l)(\mathbf{d}^{(l)}_{\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}}-\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}})+\\&+\mathbf{d}^{(l)}_{s,\tau_{n_s}}-\mathbf{v}^{(l)}_{s,\tau_{n_s}}+Q^{(l)}_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}},\end{aligned}$$

$$n_s=\max_j\{j:\tau_j\le s\}.$$

Итерируя равенство (8), имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(l)}_s-\mathbf{y}^{(l)}_s&=e_{n_s-1}(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_2}-\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_2})+f_{n_s-1}(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_1}-\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_1})+g_{n_s-1}(\mathbf{x}^{(l)}_0-\mathbf{y}^{(l)}_0)+\\&+\sum_{j=2}^{n_s-1}q_jU^{(l)}_{\tau_{n_s-j+2},\tau_{n_s-j+1},\tau_{n_s-j},\tau_{n_s-j-1}}+q_1U^{(l)}_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-1}}.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь

$$e_{k+1}=\alpha_l e_k+f_k,\ e_1=\alpha_l,\tag{10}$$

$$f_{k+1}=\beta_l e_k+g_k,\ f_1=\beta_l,\tag{11}$$

$$g_{k+1}=(1-\alpha_l-\beta_l)e_k,\ g_1=1-\alpha_l-\beta_l,\tag{12}$$

$$q_{k+1}=e_k,\ q_1=1,\ k=1,2,\ldots,n_s-2.\tag{13}$$

Заметим, что если в правой части (2) положить $\alpha_l = \mu_l = 1$, $\beta_l = \delta_l = \nu_l = 0$, то численный метод (2) превратится в явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0, известный как метод Мильштейна [2, 3]. Сходимость метода Мильштейна доказана в [2, 3, условия теоремы 1]. Единственное существенное отличие, которое может возникнуть при обосновании сходимости численного метода (2), (3) с помощью подхода, изложенного в [2, 3], связано с тем, что коэффициенты e_k, f_k, g_k, q_k могут расти с ростом k, в то время как для метода Мильштейна $e_{n_s-1} = f_{n_s-1} = 0$, $g_{n_s-1} = 1$, $q_1 = \ldots = q_{n_s-1} = 1$.

ISSN 0572-2691

Покажем, что при α_l, $\beta_l \in [0, 1]$, $\alpha_l + \beta_l \le 1$ числа e_k, f_k, g_k, q_k принадлежат промежутку $[0, 1]$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n_s - 1$.

Из (10)–(12) следует

$$e_{k+1} = \alpha_l e_k + \beta_l e_{k-1} + (1 - \alpha_l - \beta_l)\, e_{k-2}. \tag{14}$$

Запишем несколько очевидных соотношений:

$$0 \le e_2 = (\alpha_l)^2 + \beta_l \le \alpha_l + \beta_l \le 1,\ 0 \le f_2 = \beta_l \alpha_l + 1 - \alpha_l - \beta_l \le 1 - \alpha_l \le 1,$$

$$e_2 + f_2 + g_2 = 1,\ 0 \le g_2 \le 1,\ 0 \le e_3 = \alpha_l e_2 + f_2 \le e_2 + f_2 = 1 - g_2 \le 1.$$

Таким образом, e_1, e_2, $e_3 \in [0, 1]$. Согласно этому и (14) имеем

$$0 \le e_4 \le \alpha_l + \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1.$$

Предположим теперь, что e_{k-2}, e_{k-1}, $e_k \in [0, 1]$ при некотором $k > 3$. Тогда из (14) снова получаем

$$0 \le e_{k+1} \le \alpha_l + \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1,$$

т.е. по индукции $e_k \in [0, 1]$ при $k = 1, 2, \ldots$.

В силу (12), (13) q_k, $g_k \in [0, 1]$ при $k = 1, 2, \ldots$.

Из (11), (12) вытекает

$$0 \le f_{k+1} = \beta_l e_k + (1 - \alpha_l - \beta_l)\, e_{k-1} \le \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1 - \alpha_l \le 1,$$

т.е. $f_k \in [0, 1]$ при $k = 1, 2, \ldots$.

Итак, показано, что при α_l, $\beta_l \in [0, 1]$, $\alpha_l + \beta_l \le 1$ числа e_k, f_k, g_k, q_k принадлежат промежутку $[0, 1]$ при $k = 1, 2, \ldots$.

Теперь из (9) следует

$$\mathbf{z}_s^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}\{|\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)}|^2\} \le L_1 \left(\sum_{k=0}^{2} \mathbf{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_k}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_k}^{(l)}|^2\} + \right. \tag{15}$$

$$\left. + \mathbf{M}\left\{ \left(\sum_{j=2}^{n_s - 1} q_j U^{(l)}_{\tau_{n_s - j+2}, \tau_{n_s - j+1}, \tau_{n_s - j}, \tau_{n_s - j - 1}} \right)^2 \right\} + \mathbf{M}\{(U^{(l)}_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s - 1}, \tau_{n_s - 2}})^2\} \right),$$

где постоянная L_1 не зависит от Δ.

Далее, используя условия теоремы, а также стандартные неравенства для математических ожиданий и моментные свойства стохастических интегралов, нетрудно получить (см. [2, 3]) из (15) следующее неравенство:

$$\mathbf{z}_s^{(l)} \le L_2 \Delta^2 + L_3 \int_0^s \mathbf{z}_u^{(l)} du,\ s \in [0, T]. \tag{16}$$

Здесь L_2, L_3 — постоянные, которые не зависят от Δ.

Теперь из (16) с помощью неравенств Ляпунова и Гронуолла выводим

$$\mathbf{M}\{|\,\mathbf{x}_T^{(l)} - \mathbf{y}_T^{(l)}\,|\} \le \sqrt{\mathbf{z}_T^{(l)}} \le L_4\Delta\,,$$

т.е. выполняется

$$\mathbf{M}\{|\,\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T\,|\} \le L_5\Delta\,,$$

где постоянные L_4, L_5 не зависят от Δ.

Теорема доказана.

Отметим, что если в (2) взять переменный шаг интегрирования, то теорема остается в силе. При этом роль Δ в формулировке теоремы будет играть величина $\Delta = \max\limits_{1\le j\le N-1} \Delta_j$, Δ_j — j-й шаг интегрирования.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$dx_t = ax_t dt + bx_t dw_t. \tag{17}$$

Здесь a, b — постоянные; w_t — скалярный стандартный винеровский процесс. Известно [2], что решение уравнения (17) при $t = T$ имеет вид

$$x_T = x_0 e^{\left(a-\frac{1}{2}b^2\right)T + bw_T}. \tag{18}$$

Осуществим тестирование численного метода (2), (3) с помощью схемы, предложенной в [2]. Эта схема состоит [2] в вычислении оценки $\hat{\varepsilon}_{L,M}$ ошибки $\varepsilon = \mathbf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\}$ по формуле

$$\hat{\varepsilon}_{L,M} = \frac{1}{LM}\sum_{k=1}^{L}\sum_{j=1}^{M} |\,\mathbf{x}_T^{(k,j)} - \mathbf{y}_T^{\Delta(k,j)}\,| \tag{19}$$

при различных значениях шага интегрирования Δ; $\mathbf{y}_T^{\Delta(k,j)}$ $(k = 1,\ldots, L,\ j = 1,\ldots, M)$ — независимые реализации случайной величины $\mathbf{y}_T = \mathbf{y}_T^{\Delta}$, которая получена с помощью рассматриваемого численного метода при постоянном шаге интегрирования Δ и является приближенным значением $\mathbf{x}_T$; $\mathbf{x}_T^{(k,j)}$ $(k = 1,\ldots, L,\ j = 1,\ldots, M)$ — независимые реализации случайной величины $\mathbf{x}_T$ вида (18); $\mathbf{x}_T^{(k,j)}$ и $\mathbf{y}_T^{\Delta(k,j)}$ при фиксированных k и j соответствуют одной и той же реализации винеровского процесса w_t, $t \in [0, T]$.

Численный эксперимент 1 (рис. 1). Смоделировать 2000 (M = 20 групп по L = 100 штук в каждой) независимых реализаций случайной величины $\mathbf{x}_T$ вида (18) по формуле

$$x_0 e^{\left(a-\frac{1}{2}b^2\right)T + b\sqrt{\Delta}\sum\limits_{p=1}^{N}\zeta_p} \tag{20}$$

при $x_0 = 1$, $T = 1$, $a = b = 1.5$, $N = T/\Delta$, $\Delta = 2^{-3}$, а также с помощью численного метода (2), (3) при тех же исходных данных и $y_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = \frac{1}{2}$

Два начальных шага осуществить с помощью явного метода Мильштейна (численный метод (2), (3) при $\alpha_1 = \mu_1 = 1$, $\beta_1 = \delta_1 = \nu_1 = 0$, рис. 1, кривая 1). Для моделирования стохастических интегралов Ито, входящих в (2), (3), использовать формулы

$$\hat{I}^{(1)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} = \sqrt{\Delta}\,\zeta_p\,,\quad \hat{I}^{(11)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p} = \frac{\Delta}{2}((\zeta_p)^2 - 1)\,. \tag{21}$$

ISSN 0572-2691

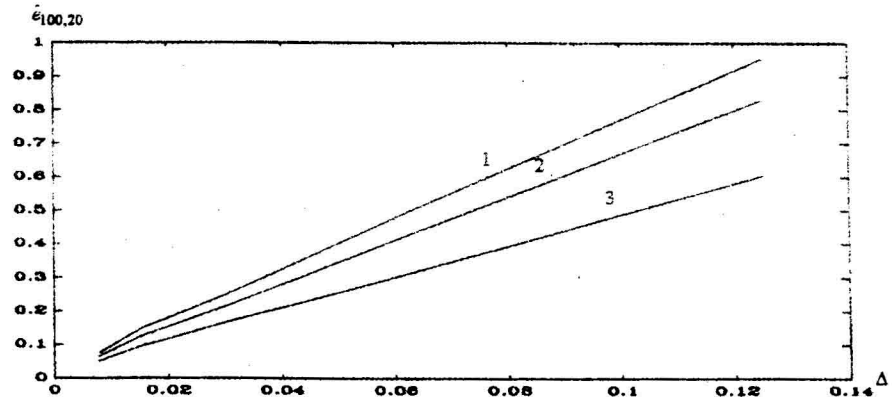

Рис. 1

В формулах (20), (21) ζ_p — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины. Вычислить $\hat{\varepsilon}_{100,20}$ по формуле (19), повторить вычисления при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 4, 5, 6, 7$, и построить зависимость $\hat{\varepsilon}_{100,20}$ (Δ), $\Delta = 2^{-j}$, $j = 3, 4, \ldots, 7$. Повторить вычисления для $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = \frac{3}{4}$ (рис. 1, кривая 3) и $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{3}$, $\delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = = \frac{1}{2}$ (рис. 1, кривая 2).

Наличие производных в выражении численного метода является, как известно, его недостатком. В связи с этим построим конечноразностную модификацию численного метода (2), (3). Для этого аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в величины $\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}}, \mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}, \mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p}$ в правой части (2). Например, в (2) вместо $\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p}$ можно использовать следующее соотношение:

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{l=1}^{m} B_l(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p)\hat{I}^{(l)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i,j=1}^{m}(\rho_1 B_i(\mathbf{y}_{\tau_p} + \sqrt{\Delta}\lambda_1 B_j(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p),\tau_p) + \rho_2 B_i(\mathbf{y}_{\tau_p} + \sqrt{\Delta}\lambda_2 B_j(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p),\tau_p))\hat{I}^{(ji)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}, \quad (22)$$

где постоянные $\rho_1, \rho_2, \lambda_1, \lambda_2$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases}\rho_1 + \rho_2 = 0,\\ \rho_1\lambda_1 + \rho_2\lambda_2 = 1.\end{cases}$$

В частности, можно взять

$$\rho_1 = \frac{1}{2},\ \rho_2 = -\frac{1}{2},\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0. \quad (23)$$

Численный эксперимент 2. Повторить численный эксперимент 1 для численного метода (2), (22), (23). Два начальных шага осуществить с помощью явного одношагового сильного конечноразностного численного метода порядка точности 1.0 (численный метод (2), (22), (23) при $\alpha_1 = \mu_1 = 1$, $\beta_1 = \delta_1 = \nu_1 = 0$).

Результаты численного эксперимента 2 совпадают с точностью до 10^{-4} с результатами численного эксперимента 1.

Поясним кратко, как может быть обоснована сходимость численного метода (2), (22), (23). С помощью обычной формулы Тейлора правая часть (22) приводится к представлению, которое отличается от правой части (3) наличием слагаемого, имеющего порядок малости $\frac{3}{2}$ по Δ в среднеквадратическом смысле при $\Delta \downarrow 0$. Далее сходимость численного метода (2), (22), (23) обосновывается аналогично тому, как это сделано для численного метода (2), (3) (см. теорему).

Отметим, что в правой части (22) содержится множитель $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. Однако делить на малую величину $\sqrt{\Delta}$ на стадии реализации численного метода (2), (22), (23) не придется, так как аппроксимация $\hat{I}^{(ji)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}$ пропорциональна Δ [2, 6–9] (частный случай этой аппроксимации при $i = j = 1$ дается формулой (21)).

Трехшаговые сильные численные методы порядка точности 1.5. Разовьем подход, изложенный в предыдущем разделе. В результате получим следующий трехшаговый сильный численный метод порядка точности 1.5:

$$\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{p+1}} = \alpha_l \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_p} + \beta_l \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{p-1}} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{p-2}} +$$

$$+ \Delta[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) +$$

$$+ (3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})] +$$

$$+ \Delta^2[\varepsilon_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \lambda_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \varphi_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \quad (24)$$

$$+\left(\frac{9}{2}-2\alpha_l-\frac{1}{2}\beta_l-3\delta_l-2\mu_l-\nu_l-\varepsilon_l-\lambda_l-\varphi_l\right)L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})] -$$

$$-\Delta\sum_{i=1}^{m}[\delta_l G^{(i)}\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)\hat{I}^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} + (\delta_l+\mu_l-1)G^{(i)}\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \times$$

$$\times \hat{I}^{(i)}_{(0)\tau_p,\tau_{p-1}} + (\alpha_l+\delta_l+\mu_l+\nu_l-2)G^{(i)}\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})\hat{I}^{(i)}_{(0)\tau_{p-1},\tau_{p-2}}] +$$

$$+ (1-\alpha_l)\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}} + \mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p}.$$

Здесь

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i=1}^{m} B_i(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)\hat{I}^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i,j=1}^{m} G^{(j)}B_i(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)\hat{I}^{(ji)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}[G^{(j)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)(\Delta\hat{I}^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} + \hat{I}^{(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}) - LB_i(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)\hat{I}^{(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}] + \quad (25)$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{m} G^{(k)}G^{(j)}B_i(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)\hat{I}^{(kji)}_{(000)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$\hat{I}^{(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}, \hat{I}^{(kji)}_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито

ISSN 0572-2691

$$I^{(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_p - s)d\mathbf{w}_s^{(i)},\ I^{(kji)}_{(000)\tau_{p+1},\tau_p} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int\limits_{\tau_p}^{s} \int\limits_{\tau_p}^{\theta} d\mathbf{w}_v^{(k)} d\mathbf{w}_\theta^{(j)} d\mathbf{w}_s^{(i)};$$

$\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]$; $\alpha_l + \beta_l \le 1$; $\delta_l, \mu_l, \nu_l, \varepsilon_l, \lambda_l, \varphi_l$ — численные параметры; остальные обозначения, входящие в (24), такие же, как и в (2).

Отметим, что при $\varepsilon_l = \lambda_l = \varphi_l = 0$, $\frac{9}{2} - 2\alpha_l - \frac{1}{2}\beta_l - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l = 0$ в правую часть (24) войдет меньшее количество частных производных, чем в явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 (численный метод (24) при $\beta_l = 0$, $\alpha_l = 1$, $\delta_l = 0$, $\mu_l = 1$, $\nu_l = 0$, $\varepsilon_l = 0$, $\lambda_l = \frac{1}{2}$, $\varphi_l = 0$), так как в правую часть последнего входит слагаемое $\frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)$ [2, 3].

Не приводя доказательство сходимости численного метода (24), (25), заметим, что оно может быть проведено аналогично доказательству теоремы с использованием представления

$$\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{p+1}} = \alpha_l \mathbf{x}^{(l)}_{\tau_p} + \beta_l \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{p-1}} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{p-2}} +$$

$$+ \Delta[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) +$$

$$+ (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})] +$$

$$+ \Delta^2 [\varepsilon_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \lambda_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \varphi_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \qquad (26)$$

$$+ \left(\frac{9}{2} - 2\alpha_l - \frac{1}{2}\beta_l - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l\right) L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})] -$$

$$- \Delta[\delta_l \mathbf{q}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} + (\delta_l + \mu_l - 1)\mathbf{q}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} + (\alpha_l + \delta_l + \mu_l + \nu_l - 2)\mathbf{q}^{(l)}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}] +$$

$$+ (1-\alpha_l)\mathbf{g}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{g}^{(l)}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}} + \mathbf{g}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} \text{ п.н.},$$

где

$$\mathbf{q}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i=1}^{m} G^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$\mathbf{g}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$\mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i=1}^{m} B_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i,j=1}^{m} G^{(j)} B_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I^{(ji)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} [G^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)(\Delta I^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} + I^{(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}) - LB_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I^{(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}] +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{m} G^{(k)} G^{(j)} B_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I^{(kji)}_{(000)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$\mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(\int\limits_{\tau_p}^{s} LL\,\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta,\theta)d\theta + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_p}^{s} G^{(i)} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta,\theta)d\mathbf{w}_\theta^{(i)} \right) ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(\int\limits_{\tau_p}^{s} LG^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta,\theta)d\theta + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\tau_p}^{s} G^{(j)}G^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta,\theta)d\mathbf{w}_\theta^{(i)} \right) d\mathbf{w}_s^{(i)},$$

$$\mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int\limits_{\tau_p}^{s} \left(\int\limits_{\tau_p}^{\theta} LL\,\mathbf{a}(\mathbf{x}_u,u)\,du + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_p}^{\theta} G^{(i)} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_u,u)d\mathbf{w}_u^{(i)} \right) d\theta\,ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int\limits_{\tau_p}^{s} \left(\int\limits_{\tau_p}^{\theta} LG^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_u,u)\,du + \sum_{j=1}^{m} d\mathbf{w}_u^{(j)} \right) d\mathbf{w}_\theta^{(i)} ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int\limits_{\tau_p}^{s} \left(\int\limits_{\tau_p}^{\theta} LLB_i(\mathbf{x}_u,u)\,du + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\tau_p}^{\theta} G^{(j)} LB_i(\mathbf{x}_u,u)d\mathbf{w}_u^{(j)} \right) d\theta\,d\mathbf{w}_s^{(i)} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{m} \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int\limits_{\tau_p}^{s} \left(\int\limits_{\tau_p}^{\theta} LG^{(j)} B_i(\mathbf{x}_u,u)\,du + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\tau_p}^{\theta} G^{(k)} G^{(j)} B_i(\mathbf{x}_u,u)d\mathbf{w}_u^{(k)} \right) d\mathbf{w}_\theta^{(j)} d\mathbf{w}_s^{(i)};$$

остальные обозначения, входящие в (26), такие же, как и в (24), (25).

Заметим, что представление (26) получается с использованием соотношений

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{x}_{\tau_p} + \Delta\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p) + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p} \text{ п.н.},$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}},\tau_{p+1}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p) + \Delta L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p) + \sum_{i=1}^{m} G^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p) I_{(0)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} + \mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p} \text{ п.н.},$$

которые, в свою очередь, могут быть получены с помощью формулы Ито.

Численный эксперимент 3 (рис. 2). Повторить численный эксперимент 1 для численного метода (24), (25) при следующих способах выбора параметров:

1) $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \nu_1 = 1$, $\delta_1 = \frac{1}{2}$ (рис. 2, кривая 3);

2) $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \nu_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_1 = 1$ (рис. 2, кривая 1);

3) $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \frac{1}{2}$, $\nu_1 = 1$, $\delta_1 = \frac{3}{4}$ (рис. 2, кривая 2).

Для моделирования повторного стохастического интеграла Ито $I_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(111)}$ использовать формулу

$$\hat{I}_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}^{(111)} = \frac{\Delta^{3/2}}{6}\left((\zeta_p)^3 - 3\zeta_p\right),$$

ISSN 0572-2691

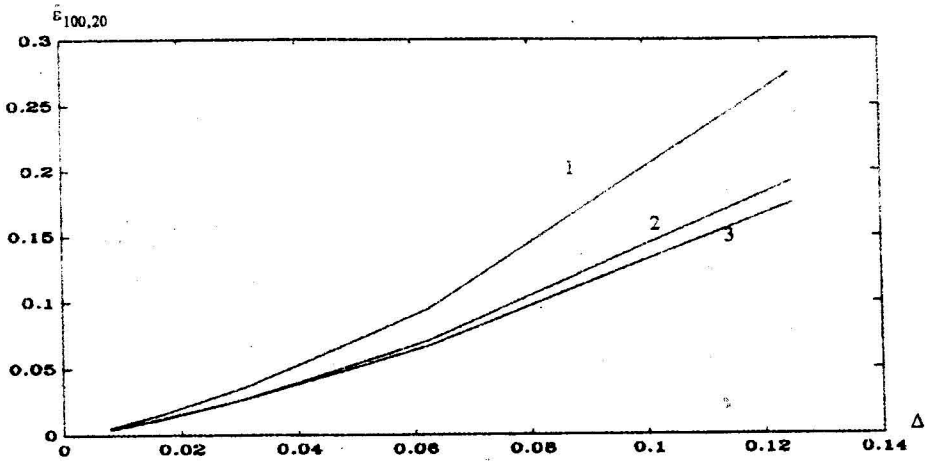

Рис. 2

где ζ_p — такие же случайные величины, как и в численном эксперименте 1. Не моделировать стохастический интеграл Ито $I^{(1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}$, так как коэффициент при нем окажется равным нулю в выражении, которое получается после применения численного метода (24), (25) к уравнению (17).

Построим конечноразностный вариант численного метода (24), (25). Для этого аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в правую часть (25). В результате в (24) вместо $\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p}$ вида (25) используем соотношение

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i=1}^{m} B_i(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p)\hat{I}^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2}\theta_k B_i(\mathbf{y}_{\tau_p}+\sqrt{\Delta}\,\eta_k B_j(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p),\tau_p)\hat{I}^{(ji)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{2}\pi_k\mathbf{a}(\mathbf{y}_{\tau_p}+\Delta\sigma_k B_i(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p),\tau_p)(\hat{I}^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p}+\hat{I}^{(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p})-\right.$$

$$-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{3}\rho_k B_i(\mathbf{y}_{\tau_p}+\sqrt{\Delta}\,\omega_k B_r(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p),\tau_p)+\right. \qquad (27)$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{2}\chi_k B_i(\mathbf{y}_{\tau_p}+\Delta\psi_k\mathbf{a}(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p),\tau_p+\gamma_k\Delta)\right)\hat{I}^{(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i,j,q=1}^{m}\sum_{k=1}^{2}\theta_k\mathbf{k}_{ij}(\mathbf{y}_{\tau_p}+\sqrt{\Delta}\,\eta_k B_q(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p),\tau_p)\hat{I}^{(qji)}_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}.$$

Здесь

$$\mathbf{k}_{ij}(\mathbf{y},s)=\sum_{k=1}^{2}\pi_k B_i(\mathbf{y}+\sqrt{\Delta}\,\sigma_k B_j(\mathbf{y},s),s),$$

$\mathbf{y} \in \mathcal{R}^n$, $s \in [0, T]$; параметры θ_k, η_k, π_k, σ_k, χ_k, ψ_k, γ_k, ρ_i, ω_i, $k = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют следующим системам алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} \theta_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \theta_i \eta_i = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \theta_i \eta_i^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} \pi_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \pi_i \sigma_i = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \rho_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \rho_i \omega_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \rho_i \dfrac{\omega_i^2}{2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} \chi_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \chi_i \gamma_i = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \chi_i \psi_i = 1. \end{cases}$$

Например, можно взять

$$\theta_1 = \rho_1 = \rho_2 = \omega_3 = \chi_1 = 1, \ \theta_2 = \chi_2 = -1, \ \pi_1 = \eta_1 = \gamma_1 = \psi_1 = \frac{1}{2},$$

$$\pi_2 = \eta_2 = \gamma_2 = \psi_2 = -\frac{1}{2}, \ \sigma_2 = \omega_1 = 0, \ \sigma_1 = \omega_2 = 2, \ \rho_3 = -2. \tag{28}$$

Заметим, что сходимость численного метода (24), (27), (28) может быть обоснована так же, как и сходимость численного метода (2), (22). В правую часть (27) входят множители $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}, \frac{1}{\Delta}$. Однако делить на малые величины $\sqrt{\Delta}, \Delta$ на стадии реализации численного метода (24), (27), (28) не придется, так как аппроксимации $\hat{I}^{(i)}_{(0)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{I}^{(i)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{I}^{(ji)}_{(00)\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{I}^{(qji)}_{(000)\tau_{p+1},\tau_p}$ пропорциональны соответственно величинам $\sqrt{\Delta}$, $\Delta\sqrt{\Delta}$, Δ и $\Delta\sqrt{\Delta}$ [2, 6–9].

Численный эксперимент 4 (рис. 3). Повторить численный эксперимент 3 для численного метода (24), (27), (28). Для моделирования стохастического интеграла $I^{(1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}$ использовать формулу

$$\hat{I}^{(1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2}\left(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_p\right),$$

где ζ_p, ξ_p, $p = 0, 1, \ldots, N-1$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины, а ζ_p' — такие же случайные величины, как и в численном эксперименте 1. Два начальных шага осуществить с помощью явного одношагового сильного конечноразностного численного метода порядка точности 1.5 следующего вида [6]:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \frac{\Delta}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{\tau_p} + \sqrt{\Delta}\lambda_j B_r(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p), \tau_p) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2}\rho_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{\tau_p} + \Delta\nu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p), \tau_p + \varphi_j\Delta)\right) + \mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p}.$$

Здесь $\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p}$ имеет вид (27), (28); $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_3 = -2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$.

ISSN 0572-2691

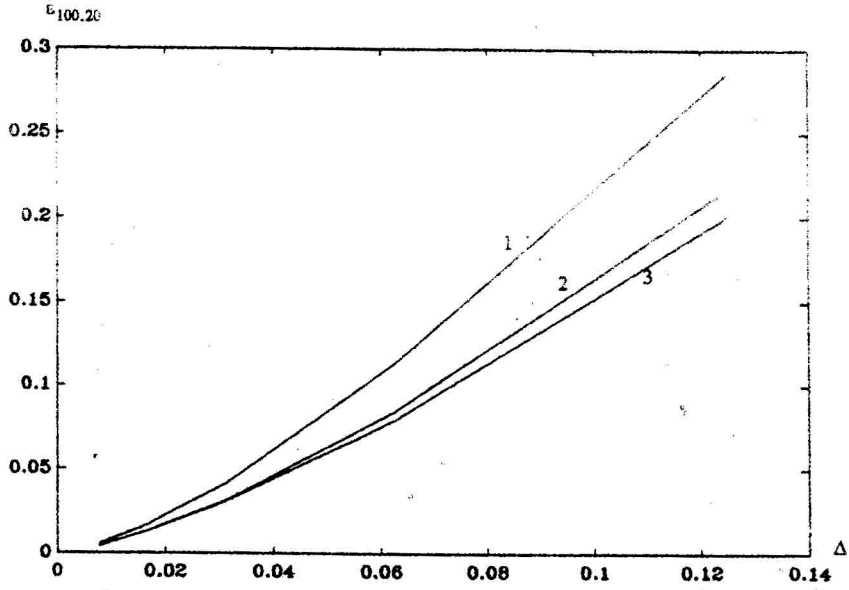

Рис. 3

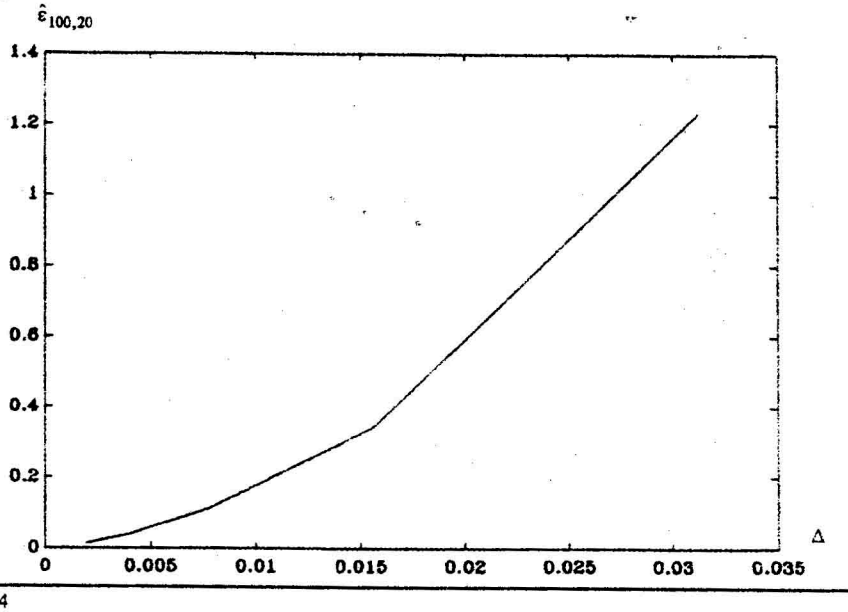

Рис. 4

Сравнивая рис. 2 и 3, отметим, что ошибки, даваемые численным методом (24), (27), (28), как и следовало ожидать, незначительно больше, чем соответствующие ошибки, даваемые численным методом (24), (25).

Отметим, что в [2, 3, 5, 6] рассматривались двухшаговые сильные численные методы для стохастических дифференциальных уравнений Ито, в которых параметры принадлежат промежутку [0, 1]. Приведем пример сходящегося трехшагового сильного численного метода порядка точности 1.5, у которого не все параметры принадлежат промежутку [0, 1].

Численный эксперимент 5 (рис. 4). Повторить численный эксперимент 3 для численного метода (24), (25) при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\delta_1 = 5$, $\mu_1 = -8$, $\nu_1 = \frac{11}{2}$, $\varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0$, $\Delta = 2^{-j}$, $j = 5, 6, \ldots, 9$.

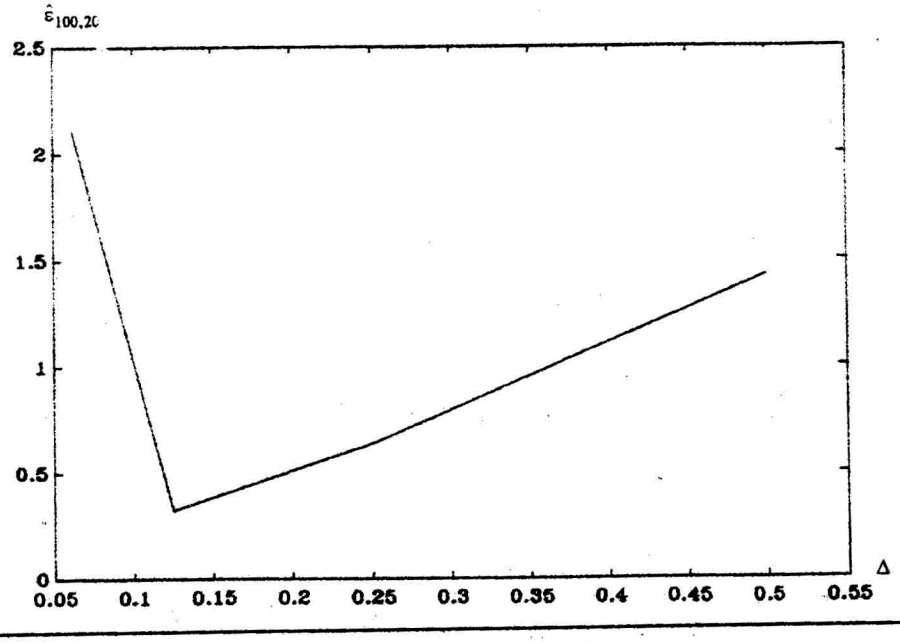

Рис. 5

В настоящей работе показывается, что одним из достаточных условий, обеспечивающих сходимость трехшаговых сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито, является следующее условие: α_l, $\beta_l \in$ $\in [0, 1]$, $\alpha_l + \beta_l \le 1$. В заключение приведем численный пример, в котором невыполнение данного условия приводит к нарушению сходимости рассматриваемого трехшагового численного метода.

Численный эксперимент 6 (рис. 5). Повторить численный эксперимент 3 для численного метода (24), (25) при $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 2$, $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = \frac{1}{2}$, $\nu_1 = 1$, $\varepsilon_1 =$ $= \varphi_1 = \lambda_1 = 0$, $\Delta = 2^{-j}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Д.Ф. Кузнєцов

ТРИКРОКОВІ СИЛЬНІ ЧИСЛОВІ МЕТОДИ ПОРЯДКІВ ТОЧНОСТІ 1.0 ТА 1.5 ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО

Дана робота присвячена трикроковим сильним числовим методам порядків точності 1.0 і 1.5 для стохастичних диференціальних рівнянь Ito. Запропоновано явні й неявні трикрокові числові схеми, а також трикрокові числові схеми типу Рунге–Кутта. Збіжність розглянутих числових методів доводиться теоретично та ілюструється числовими експериментами.

ISSN 0572-2691

D.F. Kuznetsov

THREE-STEP ORDER 1.0 AND 1.5 STRONG NUMERICAL METHODS FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL ITO EQUATIONS

The article is devoted to constructing of three-step order 1.0 and 1.5 strong numerical methods for stochastic differential Ito equations. Explicit and implicit three-step numerical schemes and three-step numerical schemes of Runge–Kutta type are derived. Convergence of considered methods is proved. Numerical experiments illustrated this convergence.

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М. : Наука, 1977. — 660 с.
2. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. — Berlin : Springer-Verlag, 1992. — 632 p.
3. *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. — Свердловск : Изд-во Урал. ун-та, 1988. — 225 с.
4. *Lepingle D., Ribemont B.* Un schema multipas d'approximation de l'equation de angevin // Stoch. Proc. Appl. — 1990. — 37. — P. 61–69.
5. *Kloeden P.E., Platen E.* Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations // J. Statist. Physics.— 1992. — 66. — P. 283–314.
6. *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. — С.-Петербург : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2001. — 712 с.
7. *Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W.* The approximation of multiplestochastic integrals // Stoch. Anal. Appl. — 1992. — 10, N 4. — P. 431–441.
8. *Кузнецов Д.Ф.* Применение методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито к численному моделированию управляемых стохастических систем // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 4. — С. 91–108.
9. *Кузнецов Д.Ф.* Применение полиномов Лежандра к среднеквадратической аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений // Там же. — 2000. — № 5. — С. 84–104.

Получено 23.07.2001