Том 70 | ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ | 2025 | Выпуск 3

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ НА ДЕСЯТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ[1)]

С 31 мая по 6 июня 2025 г. состоялась 10-я Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-10). Она (как и предыдущая МКСМ-9) проходила в поселке Дивноморское (г. Геленджик) в спортивно-оздоровительном комплексе “Радуга” Донского государственного технического университета. Организаторами нынешней конференции стали Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (включая Математический центр мирового уровня “Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук”), Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (кафедра теории вероятностей), Институт AIRI, Национальный комитет Общества Бернулли по математической статистике, теории вероятностей, комбинаторике и их применениям, Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета (РНОМЦ ЮФУ), Донской государственный технический университет (ДГТУ, кафедра высшей математики).

Данная конференция была посвящена 90-летию создания А. Н. Колмогоровым кафедры теории вероятностей Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. В своем вступительном докладе “К 90-летию кафедры теории вероятностей МГУ” председатель Оргкомитета МКСМ-10 академик РАН А. Н. Ширяев подробно рассказал о становлении теории вероятностей в СССР как отдельной науки и о том, как к 1935 г. была заложена база для создания на математическом отделении механико-математического факультета Московского университета кафедры теории вероятностей. В этом докладе также были перечислены и проанализированы выдающиеся научные достижения сотрудников кафедры за 90 лет ее существования[2)].

К началу конференции был подготовлен и напечатан специальный выпуск журнала *Journal of Mathematical Sciences*, посвященный 90-летию академика А. Н. Ширяева, который уже долгое время возглавляет кафедру теории вероятностей МГУ. Директор РНОМЦ ЮФУ профессор А. Н. Карапетянц на открытии конференции выступил с приветственной речью и передал несколько экземпляров специального выпуска оргкомитету конференции.

[1)] Конференция проводилась при финансовой поддержке Института AIRI и Минобрнауки России (соглашения № 075-02-2025-1720 и № 075-15-2025-303).

[2)] Текст доклада публикуется в разделе “Информация о научной жизни” настоящего выпуска журнала.

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5846

В МКСМ-10 наряду с известными российскими учеными приняли участие представители Португалии, Таджикистана, Казахстана, Узбекистана. Российские участники представляли следующие города: Москва, Санкт-Петербург, Ростов-на-Дону, Воронеж, Томск, Уфа, Нижний Новгород, Хабаровск, Челябинск, Сочи, Таганрог, Майкоп, Великий Новгород, Ульяновск, Сыктывкар, Краснодар, Архангельск, Иваново, Калуга. Всего было сделано 22 пленарных и 54 секционных докладов.

И. В. Павлов, Т. А. Волосатова, П. А. Яськов,
А. А. Муравлев, А. Н. Карапетянц

Ниже публикуются тезисы докладов и сообщений участников конференции.

Абдрахманов С. И. (УУНиТ, Уфа, Россия)**. Об одном методе построения решений одномерных стохастического и детерминированного нелинейных уравнений теплопроводности и горения.**

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задан случайный процесс $V(t)$, $t \in [0,T]$, с непрерывными траекториями. Исследуется задача Коши:

$$\begin{aligned} d_t(u(x,t)) &= [K(u(x,t),x,V(t))_{xx} + H(u(x,t),x,V(t))]\,dt \\ &\quad + q(u(x,t),x) * dV(t), \qquad u(x,0)=\varphi(x), \quad (x,t) \in \mathbf{R}\times[0,T], \end{aligned} \tag{1}$$

где последний интеграл в правой части равенства есть симметричный интеграл [1] по процессу $V(t)$. Пусть $K_z(z,x,v) \neq 0$ при любых $z>0$, x и v, а функция $1/q(z,x)$ локально интегрируема по переменной $z>0$. Определим функцию $\Phi(z,x) = \int_0^z dy/q(y,x)$ и обратную к ней при каждом x функцию $G(\,\cdot\,,x)$. Введем функцию

$$R(x,z,\zeta) = \frac{1}{K_z(z,x,0)}\,[-K_{zz}(z,x,0)\zeta^2 - 2K_{xz}(z,x,0)\zeta - K_{xx}(z,x,0) - H(z,x,0)].$$

Пусть функция $\varphi=\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению $\varphi'' = R(x,\varphi,\varphi')$.

Следующая теорема дополняет результаты работы [2].

Теорема. *Если функция $G = G(v+\Phi(\varphi(x),x),x)$ удовлетворяет уравнению $K(G,x,v)_{xx} + H(G,x,v) = 0$ при каждом v, то функция*

$$u = u(x,V(t)) = G(V(t)+\Phi(\varphi(x),x),x)$$

является решением задачи Коши (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. С. Насыров, *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ*, Физматлит, М., 2011, 212 с.
2. S. I. Abdrakhmanov, F. S. Nasyrov, “On nonlinear heat-conduction equations with a random right part”, *Lobachevskii J. Math.*, **45**:6 (2024), 2641–2650.

Теорема 2. *Пусть* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ *и* $d \geqslant 1$. *Тогда*

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbf{E}R_t \leqslant 2\left(\sqrt{d} + \frac{1}{\sqrt{d}}\right) \frac{\mathbf{E}\|Z_1\|_1^2}{\mathbf{E}\|Z_1\|_1}.$$

Заметим, что оценка из теоремы 2 асимптотически оптимальна по порядку величины относительно d и совпадает с классическим результатом Лордена при $d = 1$. Благодаря субаддитивности функции $t \mapsto \mathbf{E}R_t$ и закону больших чисел имеет место асимптотика

$$\frac{\mathbf{E}R_t}{t} \leqslant \left(\frac{\mathbf{E}\|Z_1\|}{\|\mathbf{E}Z_1\|} - 1\right) + o(1), \qquad t \to \infty.$$

Полученные оценки применимы, например, в задачах управления портфельным риском. Переход от скалярного риска к вектору доходностей $(Z_k^{(1)}, \ldots, Z_k^{(d)})$ делает естественным использование нормы $\|\cdot\|_1$. В частности, теорема 2 дает верхнюю границу порога превышения при ценовом шоке величины t.

Кузнецов Д. Ф. (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия). **Последние результаты по новому подходу к разложению в ряд повторных стохастических интегралов Стратоновича. Кратности от 1 до 8 и выше.**

Теорема 1 [1, разд. 2.22, 2.27, 2.29–2.31]**.** *Пусть* $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_k(\tau) \in C[t,T]$, $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *произвольная полная ортонормированная система в* $L_2[t,T]$ *и верно одно из условий* (2.1294), (2.1310) *или* (2.1341) *из* [1]. *Тогда для всех* $i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, m$ *и* $k \in \mathbf{N}$

$$\int_t^T \psi_k(t_k) \cdots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \circ d\mathbf{W}_{t_1}^{(i_1)} \cdots \circ d\mathbf{W}_{t_k}^{(i_k)}$$
$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{p} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \zeta_{j_l}^{(i_l)}, \tag{1}$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(\tau)\, d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ — *независимые* $N(0,1)$*-распределенные случайные величины* $(i \neq 0)$, $C_{j_k\ldots j_1}$ — *коэффициент Фурье для*

$$K(t_1, \ldots, t_k) = \psi_1(t_1) \cdots \psi_k(t_k)\, \mathbf{I}_{\{t_1 < \cdots < t_k\}} \quad (k \geqslant 2),$$
$$K(t_1) = \psi_1(t_1), \qquad t_1, \ldots, t_k \in [t,T],$$

$d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ *и* $\circ d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ — *дифференциалы Ито и Стратоновича,* $\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ — *независимые стандартные винеровские процессы,* $\mathbf{W}_\tau^{(0)} = \tau$.

Теорема 2 [1, разд. 2.1.4, 2.24, 2.32–2.34]**.** *Пусть* $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *как в теореме* 1. *Тогда* (1) *верно без предположений* (2.1294), (2.1310) *или* (2.1341) *из* [1] *в следующих трех случаях*:

1) $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau) \in C[t,T]$ $(k = 1, 2)$;
2) $\psi_1(\tau) = (\tau - t)^{p_1}, \ldots, \psi_4(\tau) = (\tau - t)^{p_4}$, $p_1, \ldots, p_4 = 0, 1, 2, \ldots$ $(k = 3, 4)$;
3) $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_6(\tau) \equiv 1$ $(k = 5, 6)$.

Теорема 3 [1, разд. 2.36, 2.37]**.** *Пусть* $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *полная ортонормированная система многочленов Лежандра или тригонометрический базис Фурье в* $L_2[t,T]$. *Тогда* (1) *верно без предположений* (2.1294), (2.1310) *или* (2.1341) *из* [1] *для случая* $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_8(\tau) \equiv 1$ $(k = 7, 8)$.

Приведенные выше теоремы полезны для численного решения стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений с некоммутативным шумом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. F. Kuznetsov, "Strong approximation of iterated Itô and Stratonovich stochastic integrals based on generalized multiple Fourier series. Application to numerical solution of Itô SDEs and semilinear SPDEs", 2025 (v1 — 2020, v66 — 2025), 1218 с., arXiv: 2003.14184v66.

Лебедев А. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)**. Трехмерные полиномиальные копулы и нетранзитивные наборы случайных величин.**

Данная работа продолжает исследование [1]. Рассмотрим случайный вектор (X_1, X_2, X_3) с полиномиальной плотностью на $[0,1]^3$ вида

$$p(x_1, x_2, x_3) = 1 + \sum_{i=1}^{3} a_i x_i + \sum_{j=1}^{3} b_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_i x_j^2, \tag{1}$$

где C — матрица размера 3×3 с диагональными элементами $c_{ii} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, в предположении $p(x_1, x_2, x_3) \geqslant 0$.

Теорема. *Плотность* (1) *в случае кососимметричной матрицы C определяет копулу при условиях*

$$a_i = -\frac{c_{ij} + c_{ik}}{3}, \qquad b_i = -\frac{c_{ji} + c_{ki}}{2},$$

где все i, j, k различны, $1 \leqslant i, j, k \leqslant 3$, и обладает свойством нетранзитивности тогда и только тогда, когда $C = AC^0$, где A — положительное число и C^0 — кососимметричная матрица с элементами

$$\begin{aligned} c_{12}^0 &= \frac{10}{32} w_1 + \frac{11}{32} w_2 + \frac{11}{32} w_3, \\ c_{23}^0 &= \frac{11}{32} w_1 + \frac{10}{32} w_2 + \frac{11}{32} w_3, \\ c_{31}^0 &= \frac{11}{32} w_1 + \frac{11}{32} w_2 + \frac{10}{32} w_3 \end{aligned}$$

при $0 < w_i < 1$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, $w_1 + w_2 + w_3 = 1$, при этом

$$\mathbf{P}(X_i < X_j) = \frac{1}{2} + \frac{A(1 - w_i)}{360}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3,$$

где j — следующий за i индекс в цикле $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Лебедев, "Многомерные непрерывные распределения и копулы, порождающие нетранзитивные наборы зависимых случайных величин", *Автомат. и телемех.*, 2025, № 4, 55–70.