

Д.Ф.КУЗНЕЦОВ

ДВА НОВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАЗЛОЖЕНИЯ
ТЕЙЛОРА – СТРАТОНОВИЧА

Санкт-Петербург
Издательство СПбГУ
1999

УДК 519.21, 518.61

Кузнецов Д.Ф. Два новых представления разложения Тейлора – Стратоновича.
– СПб: Издательство СПбГТУ, 1999. – 13с.

С помощью теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито и соотношений между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито в работе получены два новых представления разложения Тейлора – Стратоновича. Данные представления содержат заметно меньшее количество различных повторных стохастических интегралов Стратоновича, нежели классическое разложение Тейлора – Стратоновича и могут быть полезны при построении сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений.

Библиогр. 14 назв.

Печатается с оригинал-макета, подготовленного автором

Издание осуществлено при поддержке Министерства общего и профессионального образования РФ (грант N 97-0-1.8-71).

© Д.Ф.Кузнецов, 1999

1 Введение

Известно [2] - [4], [8], [10], что один из подходов к численному решению стохастических дифференциальных уравнений Ито основывается на численном моделировании решений этих уравнений в дискретные моменты времени с помощью стохастических разложений Тейлора - Ито и Тейлора - Стратоновича [1] - [6], [8], [10], а также с помощью специальных методов [2], [3], [7], [8] аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, входящих соответственно в данные стохастические разложения. Впервые разложения Тейлора - Ито и Тейлора - Стратоновича получены в [1], [4], [5]. В [6] с помощью замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито [8], [9] получено унифицированное разложение Тейлора - Ито, которое содержит заметно меньшее количество различных повторных стохастических интегралов Ито, чем разложение Тейлора - Ито [4], [5]. В [8] получено другое представление унифицированного разложения Тейлора - Ито. Отметим, что унифицированные разложения Тейлора - Ито [6], [8] до малых порядка 2.5, 3.0 и 3.5 в среднеквадратическом смысле содержат 12, 20 и 33 различных повторных стохастических интеграла Ито соответственно, в то время как аналогичные разложения Тейлора - Ито [4], [5] содержат уже 17, 29 и 51 различных повторный стохастический интеграл Ито. Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов является достаточно сложной теоретической и вычислительной проблемой [2], [3], [7], [8]. Таким образом для построения сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений, в ряде случаев, унифицированные разложения Тейлора - Ито [6], [8] оказываются более удобными, чем разложение Тейлора - Ито [4], [5]. Далее заметим, что для сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича существует эффективный метод [7], [8], который основан на специальном кратном ряде Фурье по полным ортонормированным в пространстве L_2 системам функций. Особенно этот метод эффективен при использовании полиномов Лежандра [7], [8]. Повторные стохастические интегралы Ито из разложения Тейлора - Ито могут быть аппроксимированы в среднеквадратическом смысле с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах [2], [8]. Однако этот метод сходится заметно медленнее в среднеквадратическом смысле, чем метод, основанный на кратном ряде Фурье или метод Г.Н.Мильштейна [2]. В [7], [8] показано, на примере стохастического интеграла второй кратности, что метод, основанный на кратных интегральных суммах сходится в среднеквадратическом смысле примерно в три раза медленнее, чем метод, основанный на кратном ряде Фурье по тригонометрической системе функций и примерно в девять раз медленнее метода, основанного на кратном ряде Фурье по полиномам Лежандра. В связи с этим можно заключить, что повторные стохастические интегралы Стратоновича из разложения Тейлора - Стратоновича [1] являются более удобными объектами для среднеквадратической аппроксимации, чем повторные стохастические интегралы Ито из разложений Тейлора - Ито [4], [5], [6], [8]. Поэтому, при построении сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито в ряде случаев бывает удобнее использовать разложение Тейлора - Стратоновича, нежели разложение Тейлора - Ито. В том случае, если при построении сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито все же используется разложение Тейлора - Ито, то приходится [2], [3], [8] выражать каждый повторный стохастический интеграл Ито из разложения Тейлора - Ито через несколько повторных стохастических интегралов Стратоновича с помощью стандартных соотношений [14], [2], [3], [7], [8], а затем аппроксимировать в среднеквадратическом смысле эти повторные стохастические интегралы Стратоновича. Можно впрочем также "сразу" аппроксимировать повторные стохастические интегралы из разложения Тейлора - Ито менее эффективными методами.

Учитывая все сказанное можно прийти к выводу, что построение унифицированных разложений Тейлора - Стратоновича, содержащих меньшее количество различных повторных стохастических интегралов Стратоновича, нежели разложение Тейлора - Стратоновича [1], [3], было бы весьма полезно с точки зрения приложения к сильным численным методам для стохастических дифференциальных уравнений Ито.

2 О некоторых свойствах стохастических интегралов

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - полное вероятностное пространство, $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ - неубывающее непрерывное справа семейство под σ -алгебр $\mathcal{F}$, а $w_t - \mathcal{F}_t$ измеримый при каждом $t \in [0, T]$

стандартный винеровский процесс. Введем класс $M_2([0, T])$ случайных функций $\xi(t, \omega) \stackrel{def}{=} \xi_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые измеримы по совокупности переменных (t, ω) , $\mathcal{F}_t$ измеримы при каждом $t \in [0, T]$ и удовлетворяют условиям: $\int_0^T \mathbb{E} \xi_t^2 dt < \infty$, $\mathbb{E} \xi_t^2 < \infty$ при всех $t \in [0, T]$.

Введем на классе $M_2([0, T])$ норму $\|\xi\|_{2,T} = \left(\int_0^T \mathbb{E} \xi_t^2 dt \right)^{1/2}$. Стохастическим интегралом Ито от функции $\xi_t \in M_2([0, T])$ назовем [11], [13] следующий среднеквадратический предел:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \xi_{\tau_j^{(N)}}^{(N)} \left(w_{\tau_{j+1}^{(N)}} - w_{\tau_j^{(N)}} \right) \stackrel{def}{=} \int_0^T \xi_t dw_t, \quad (1)$$

где $\xi_t^{(N)}$ – последовательность ступенчатых функций из $M_2([0, T])$ вида: $\xi_t^{(N)} = \xi_{\tau_j^{(N)}}^{(N)}$ с в.1 при $t \in [\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)})$; $j = 0, 1, \dots, N-1$, которая сходится по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к функции ξ_t ; $\{\tau_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ – разбиение промежутка $[0, T]$ для которого:

$$0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \dots < \tau_N^{(N)} = T; \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Введем класс $Q_m([0, T])$ процессов Ито $\{\eta_t, t \in [0, T]\}$ вида:

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dw_s, \quad (3)$$

где $a_t^m, b_t^m \in M_2([0, T])$, причем при всех $s, \tau \in [0, T]$ и некоторых $C, \gamma \in (0, \infty)$ $\mathbb{E}|b_s - b_\tau|^4 \leq C|s - \tau|^\gamma$. Рассмотрим функцию $F(x, t) : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ из $C_2(-\infty, \infty)$ ($C_2(-\infty, \infty)$ – класс дважды непрерывно дифференцируемых по x на интервале $(-\infty, \infty)$ функций с ограниченной первой и второй производными).

Стохастическим интегралом Стратоновича от процесса $\{F(\eta_t, t), t \in [0, T]\}$ назовем [11] – [13] следующий среднеквадратический предел:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} F\left(\frac{1}{2}(\eta_{\tau_j^{(N)}} + \eta_{\tau_{j+1}^{(N)}}), \tau_j^{(N)}\right) (w_{\tau_{j+1}^{(N)}} - w_{\tau_j^{(N)}}) \stackrel{def}{=} \int_0^{*T} F(\eta_t, t) dw_t, \quad (4)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1).

Известно [12], [13], [3], что при определенных условиях с в.1 справедлива формула:

$$\int_0^{*T} F(\eta_t, t) dw_t = \int_0^T F(\eta_t, t) dw_t + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_t, t) b_t dt. \quad (5)$$

Если же винеровские процессы в (3) и (4) независимы, то

$$\int_0^{*T} F(\eta_t, t) dw_t = \int_0^T F(\eta_t, t) dw_t \text{ с в.1.} \quad (6)$$

Одним из возможных вариантов условий, при которых справедливы формулы (5), (6) могут быть следующие условия: $\eta_t \in Q_4([0, T])$, $F(\eta_t, t) \in M_2([0, T])$, $F(x, t) \in C_2(-\infty, \infty)$.

В [8], [9] доказана теорема о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито. В дальнейшем мы будем использовать этот результат, поэтому приведем его формулировку.

Пусть $S_2([0, T])$ – подкласс $M_2([0, T])$ среднеквадратически непрерывных на промежутке $[0, T]$ случайных функций.
Обозначим

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} dw_{t_k}^{(k)} \dots dw_{t_1}^{(1)},$$

где $\phi_\tau \in S_2([t, T])$; $[t, T] \subseteq [0, T]$; здесь и далее: $w_\tau^{(l)} = w_\tau$ либо $w_\tau^{(l)} = \tau$; w_τ – стандартный винеровский процесс; $l = 1, \dots, k+1$; $\psi_1(s), \dots, \psi_k(s) \in C([t, T])$ ($C([t, T])$ – множество непрерывных на промежутке $[t, T]$ функций); $\psi^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_1, \dots, \psi_k)$, $\psi^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1$.

Определим стохастические интегралы $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$; $k \geq 1$ вида:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{s,T} = \int_s^T \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(1)}$$

следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \psi_k(\tau_j) \Delta w_{\tau_j}^{(k)} \hat{I}[\psi^{(k-1)}]_{T, \tau_{j+1}}, \quad (7)$$

где $k \geq 1$; $\hat{I}[\psi^{(0)}]_{T,s} \stackrel{\text{def}}{=} 1$; $[s, t] \subseteq [t, T]$; $\Delta w_{\tau_j}^{(i)} = w_{\tau_{j+1}}^{(i)} - w_{\tau_j}^{(i)}$; $i = 1, \dots, k+1$; $\tau_j^{(N)} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_j$; $l = 0, 1, \dots, N-1$; $\{\tau_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ – разбиение промежутка $[t, T]$, удовлетворяющее условию типа (2).

Затем определим повторный стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$; $k \geq 1$ вида:

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \phi_s dw_s^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$$

следующим образом:

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{j+1}},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (7).

В [8], [9] доказана следующая теорема.

Теорема 1 Пусть $\phi_\tau \in S_2([t, T])$, $\psi_l(\tau) \in C([t, T])$ ($l = 1, \dots, k$). Тогда существует интеграл $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ и $J[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T} = \hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ с в.1.

В дальнейшем мы будем также использовать соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито. В [14], [3] получены данные соотношения для стохастических интегралов кратностей 1 – 4. В [7], [8] эти результаты обобщены на случай произвольного k . Приведем формулировку соответствующего утверждения.

Пусть

$$\begin{aligned} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_l, \dots, s_1} &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p=1}^l 1_{\{i_{s_p} = i_{s_{p+1}} \neq 0\}} \times \\ &\times \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_{s_l+3}} \psi_{s_l+2}(t_{s_l+2}) \int_t^{t_{s_l+2}} \psi_{s_l}(t_{s_l+1}) \psi_{s_l+1}(t_{s_l+1}) \times \\ &\times \int_t^{t_{s_l+1}} \psi_{s_l-1}(t_{s_l-1}) \dots \int_t^{t_{s_1+3}} \psi_{s_1+2}(t_{s_1+2}) \int_t^{t_{s_1+2}} \psi_{s_1}(t_{s_1+1}) \psi_{s_1+1}(t_{s_1+1}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_t^{t_{s_1+1}} \psi_{s_1-1}(t_{s_1-1}) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})} dt_{s_1+1} d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})} \dots \\
& \dots d\mathbf{w}_{t_{s_l-1}}^{(i_{s_l-1})} dt_{s_l+1} d\mathbf{w}_{t_{s_l+2}}^{(i_{s_l+2})} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \\
& J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \\
& J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},
\end{aligned}$$

где $\mathbf{w}_\tau^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) – $\mathcal{F}_\tau$ измеримые при всех $\tau \in [t, T]$ независимые стандартные винеровские процессы; $\mathbf{w}_\tau^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; $\psi_1(s), \dots, \psi_k(s) \in C_1([t, T])$ ($C_1([t, T])$ – множество непрерывно дифференцируемых на промежутке $[t, T]$ функций); $\psi^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_k, \dots, \psi_1)$, $\psi^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{k,l} = \{ & (s_l, \dots, s_1) : s_l > s_{l-1} + 1, \dots, s_2 > s_1 + 1; \\
& s_l, \dots, s_1 = 1, \dots, k-1 \},
\end{aligned}$$

$(s_l, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,l}$; $l = 1, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$; $[x]$ – целая часть числа x ; $\mathbf{1}_A$ – индикатор множества A .

В [7], [8] доказана следующая теорема.

Теорема 2 Пусть $\psi_1(s), \dots, \psi_k(s) \in C_1([t, T])$. Тогда

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \quad \text{с в.1.} \quad (8)$$

3 Разложение Тейлора – Стратоновича

В данном параграфе приведем разложение Тейлора – Стратоновича, полученное в [1] и введем ряд необходимых в дальнейшем обозначений.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + B(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{w}_t, \quad (9)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ – решение уравнения (9); $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^m$ – $\mathcal{F}_t$ измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ удовлетворяют условиям существования и единственности, в смысле стохастической эквивалентности, решения уравнения (9) [11]. Будем также предполагать, что $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ – дважды непрерывно дифференцируемая по $\mathbf{x}$ и один раз по t при всех $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ функция и функции $R(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $B(\mathbf{x}, t)$ таковы, что $L_{\mathbf{x},t}\{R(\mathbf{x}, t)\}$, $G_{\mathbf{x},t}^{(i)}\{R(\mathbf{x}, t)\} \in M_2([0, T])$; $i = 1, \dots, m$, где

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{x},t}\{\cdot\} & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\{\cdot\} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}\{\cdot\} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n B^{(lj)}(\mathbf{x}, t) B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}\{\cdot\}, \\
G_{\mathbf{x},t}^{(i)}\{\cdot\} & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n B^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}\{\cdot\}; \quad i = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

Тогда справедлива с в.1 формула Ито:

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \int_t^s L_{\mathbf{x}_\tau, \tau} \{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s G_{\mathbf{x}_\tau, \tau}^{(i)} \{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\mathbf{w}_\tau^{(i)}, \quad (10)$$

где $0 \leq t < s \leq T$.

Далее положим

$$L_{\mathbf{x}_\tau, \tau} \{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} \stackrel{\text{def}}{=} L\{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}, \quad G_{\mathbf{x}_\tau, \tau}^{(i)} \{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} \stackrel{\text{def}}{=} G^{(i)}\{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\};$$

$$\eta_\tau = R(\mathbf{x}_\tau, \tau); i = 1, \dots, m.$$

Предположим, что $G_{\mathbf{x}, \tau}^{(i)} \{R(\mathbf{x}, \tau)\} \in C_2([0, T]); i = 1, \dots, m; \eta_\tau \in Q_4([0, T])$. Ранее предполагалось, что $G^{(i)}\{\eta_\tau\} \in M_2([0, T]); i = 1, \dots, m$. Тогда с помощью (5), (6) нетрудно получить следующее равенство:

$$\int_t^s G^{(i)}\{\eta_\tau\} d\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \int_t^{*s} G^{(i)}\{\eta_\tau\} d\mathbf{w}_\tau^{(i)} - \frac{1}{2} \int_t^s G^{(i)} G^{(i)}\{\eta_\tau\} d\tau \text{ с в.1}; \quad (11)$$

$i = 1, \dots, m$.

Используя (11) перепишем (10) в виде [1]:

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s \bar{L}\{\eta_\tau\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^{*s} G^{(i)}\{\eta_\tau\} d\mathbf{w}_\tau^{(i)} \text{ с в.1}, \quad (12)$$

где

$$\bar{L}\{\eta_\tau\} \stackrel{\text{def}}{=} L\{\eta_\tau\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m G^{(i)} G^{(i)}\{\eta_\tau\}.$$

Введем обозначения:

$$^{(k)}A = \left\| A^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_k}; \quad m_1, \dots, m_k \geq 1;$$

$$^{(k)}A \cdot ^{(k)}B = \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_k=1}^{m_k} A^{(i_1 \dots i_k)} B^{(i_1 \dots i_k)}.$$

Положим также

$$^{(k)}A_{k+1} D_k A_k \dots D_1 A_1 \{\cdot\} = \left\| A_{k+1} D_k^{(i_k)} A_k \dots D_1^{(i_1)} A_1 \{\cdot\} \right\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_k},$$

где $A_p\{\cdot\}$ – скалярный оператор, в том числе может быть $A_p\{\cdot\} = \cdot; p = 1, \dots, k+1;$

$^{(1)}D_j\{\cdot\} = \left\| D_j^{(i)}\{\cdot\} \right\|_{i=1}^m$ – векторный оператор; $j = 1, \dots, k$.

Применяя многократно последовательно формулу (12) к процессу η_s можно получить следующее разложение Тейлора – Стратоновича [1], [3]:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\mu_k, \dots, \mu_1)}^{(p_k)} B_{\mu_k \dots \mu_1} \{\eta_t\} \cdot ^{(p_k)} J_{(\mu_k \dots \mu_1)s, t}^* + (D_{r+1})_{s, t} \text{ с в.1}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} (D_{r+1})_{s, t} &= \\ &= \sum_{(\mu_{r+1}, \dots, \mu_1)} \int_t^{*s} \dots \int_t^{*T_r} {}^{(p_{r+1})} B_{\mu_{r+1} \dots \mu_1} \{\eta_{\tau_{r+1}}\} \cdot \delta_{r+1} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \dots \delta_1 d\mathbf{w}_{\tau_1}; \end{aligned} \quad (14)$$

$\mu_l = \alpha$ или β ; $p_l = \sum_{j=1}^l \delta_j$; $\delta_l = 0$ и $i_l = 0$ при $\mu_l = \alpha$; $\delta_l = 1$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\mu_l = \beta$; $\sum_{(\mu_1, \dots, \mu_l)}$ – сумма по всем перестановкам в наборе $(\mu_1, \dots, \mu_l)$; обозначение $\cdot$ понимается как обычное умножение; $(i_l, \dots, i_{q+1}, 0, i_{q-1} \dots, i_1) \stackrel{def}{=} (i_l, \dots, i_{q+1}, i_{q-1} \dots, i_1)$;

$${}^{(p_l)} J_{(\mu_1 \dots \mu_l) s, t}^* = \left\| J_{(\mu_1 \dots \mu_l) s, t}^{*(i_1 \dots i_1)} \right\|_{i_1 = \delta_1, \dots, i_l = \delta_l}^{m \delta_1 \dots m \delta_l},$$

$$J_{(\mu_1 \dots \mu_l) s, t}^{*(i_1 \dots i_1)} = \int_t^{*s} \dots \int_t^{*\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_l)} \text{ при } l \geq 1; \quad (15)$$

$\mathbf{w}_{\tau}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) – независимые стандартные винеровские процессы; $\mathbf{w}_{\tau}^{(0)} \stackrel{def}{=} \tau$;

$$B_{\alpha \mu_{l-1} \dots \mu_1}^{(i_{l-1} \dots i_1)} \{\eta_{\tau}\} = \bar{L} B_{\mu_{l-1} \dots \mu_1}^{(i_{l-1} \dots i_1)} \{\eta_{\tau}\}; \quad l = 2, 3, \dots;$$

$$B_{\beta \mu_{l-1} \dots \mu_1}^{(i_{l-1} \dots i_1)} \{\eta_{\tau}\} = G^{(i_l)} B_{\mu_{l-1} \dots \mu_1}^{(i_{l-1} \dots i_1)} \{\eta_{\tau}\}; \quad l = 2, 3, \dots;$$

$$B_{\alpha} \{\eta_{\tau}\} \stackrel{def}{=} \bar{L} \{\eta_{\tau}\}; \quad B_{\beta}^{(i_1)} \{\eta_{\tau}\} \stackrel{def}{=} G^{(i_1)} \{\eta_{\tau}\};$$

$i_1, \dots, i_l = 0, 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, r+1$.

При этом предполагается, что выполнены условия существования правой части (13) [1], [3].

В данной работе с помощью замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито и с помощью соотношений между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито правая часть (13) будет преобразована к двум представлениям, в которые входит существенно меньшее количество различных повторных стохастических интегралов Стратоновича, нежели в правую часть (13).

4 Первая форма унифицированного разложения Тейлора – Стратоновича

Введем обозначения:

$$J_{l_1 \dots l_k s, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*s} (s - \tau_1)^{l_1} \dots \int_t^{*\tau_{k-1}} (s - \tau_k)^{l_k} d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)}; \quad k \geq 1, \quad (16)$$

где $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$;

$${}^{(k)} (s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k}^* = \left\| \frac{(s - t)^j}{j!} J_{l_1 \dots l_k s, t}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^m;$$

$$(s \ominus t)_*^{\mathcal{A}_q} = \{ {}^{(k)} (s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k}^* : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}_q \};$$

$$B^{\mathcal{A}_q} = \{ {}^{(k)} B_{j l_1 \dots l_k} \{\eta_{\tau}\} : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \};$$

$${}^{(k)} B_{j l_1 \dots l_k} \{\eta_{\tau}\} = \prod_{g=1}^k \frac{1}{l_g!} \sum_{q_1=0}^{l_1} \dots \sum_{q_k=0}^{l_k} (-1)^{q_1 + \dots + q_k} \prod_{g=1}^k C_{l_g}^{q_g} \times$$

$$\times {}^{(k)} B_{\alpha(j) \alpha(q_1) \beta \alpha(l_1 - q_1) \dots \alpha(q_k) \beta \alpha(l_k - q_k)} \{\eta_{\tau}\} \text{ при } k \geq 1;$$

$$\sum_{\emptyset} \stackrel{def}{=} 1;$$

$${}^{(k)} B_{j l_1 \dots l_k} \{\eta_{\tau}\} = B_{\alpha(j)} \{\eta_{\tau}\} \text{ при } k = 0;$$

$$\alpha(g) = \underbrace{\alpha \dots \alpha}_g; \quad \alpha(0)\beta = \beta, \quad \beta\alpha(0) = \beta, \quad \alpha\alpha(0) = \alpha, \quad \alpha(0)\alpha = \alpha;$$

$$C_l^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l!}{k!(l-k)!};$$

$$A_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

$$(B^{A_q} \odot (s \ominus t)_*^{A_q}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in A_q} {}^{(k)}B_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \}^k {}^{(k)}(s \ominus t)_{jl_1 \dots l_k}^*.$$

Теорема 1 Пусть выполнены условия, при которых справедливо разложение Тейлора – Стратоновича (13) [1]. Тогда

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (B^{A_q} \{ \eta_t \} \odot (s \ominus t)_*^{A_q}) + (D_{r+1})_{s,t} \text{ с в.1,} \quad (17)$$

где $(D_{r+1})_{s,t}$ имеет вид (14).

Доказательство: Рассмотрим разложение Тейлора – Стратоновича (13) при $r = 3$ и приведем все повторные стохастические интегралы Стратоновича, входящие в это разложение к виду (16).

Имеем:

$$J_{(\beta \dots \beta)_{s,t}}^{*(i_1 \dots i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} J_{0 \dots 0_{s,t}}^{*(i_1 \dots i_1)}; \quad l = 1, 2, 3.$$

Положим

$$J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (s - \tau_1)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_{k-1}} (s - \tau_k)^{l_1} d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)}; \quad k \geq 1,$$

где $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$. Далее согласно теоремам 1 и 2 с в.1 имеем:

$$\begin{aligned} J_{(\alpha\beta)_{s,t}}^{*(i_1)} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_t^s \int_t^{*t_2} dt_1 d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)} = \int_t^s \int_t^{t_2} dt_1 d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)} = (s - t)J_{0_{s,t}}^{(i_1)} - J_{1_{s,t}}^{(i_1)} = \\ &= (s - t)J_{0_{s,t}}^{*(i_1)} - J_{1_{s,t}}^{*(i_1)}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} J_{(\beta\alpha)_{s,t}}^{*(i_2)} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_t^s \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_2)} dt_2 = \int_t^s \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_2)} dt_2 = \int_t^s d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_2)} \int_{t_1}^s dt_2 = \\ &= J_{1_{s,t}}^{(i_2)} = J_{1_{s,t}}^{*(i_2)}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} J_{(\alpha\beta\beta)_{s,t}}^{*(i_2 i_1)} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_t^s \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} dt_1 d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} = \\ &= \int_t^s \int_t^{*s} \int_t^{*t_3} (t_2 - s + s - t) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} = (s - t)J_{00_{s,t}}^{*(i_2 i_1)} - J_{10_{s,t}}^{*(i_2 i_1)}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} J_{(\beta\alpha\beta)_{s,t}}^{*(i_3 i_1)} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_t^s \int_t^{*t_3} \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} = \int_t^s \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} = \\ &= \int_t^s \left(\int_t^{t_3} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} \int_{t_1}^{t_3} dt_2 \right) d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} = \int_t^s \int_t^{t_3} (t_3 - s + s - t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} = \\ &= -J_{01_{s,t}}^{(i_3 i_1)} + J_{10_{s,t}}^{(i_3 i_1)} = -J_{01_{s,t}}^{*(i_3 i_1)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \int_t^s (s - \tau) d\tau + \end{aligned}$$

$$+ J_{10s,t}^{*(i_3 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \int_t^s (s-\tau) d\tau = J_{10s,t}^{*(i_3 i_1)} - J_{01s,t}^{*(i_3 i_1)}; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} J_{(\beta\beta\alpha)s,t}^{*(i_3 i_2)} &\stackrel{def}{=} \int_t^s \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_3 = \int_t^s \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_3 + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \int_t^s \int_t^{t_3} dt_1 dt_3 = \int_t^s d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} \int_{t_1}^s d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^s dt_3 + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} (s-t)^2 = \\ &= \int_t^s d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} \int_{t_1}^s (s-t_2) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} (s-t)^2 = \\ &= J_{01s,t}^{*(i_3 i_2)} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} (s-t)^2 = \\ &= J_{01s,t}^{*(i_3 i_2)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \int_t^s (s-\tau) d\tau + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} (s-t)^2 = \\ &= J_{01s,t}^{*(i_3 i_2)}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} J_{(\alpha\alpha\beta)s,t}^{*(i_1)} &\stackrel{def}{=} \int_t^s \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} dt_1 dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} = \int_t^s \frac{(t_3-s+s-t)^2}{2} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)} = \\ &= \frac{1}{2} (s-t)^2 J_{0s,t}^{(i_1)} - (s-t) J_{1s,t}^{(i_1)} + \frac{1}{2} J_{2s,t}^{(i_1)} = \\ &= \frac{1}{2} (s-t)^2 J_{0s,t}^{*(i_1)} - (s-t) J_{1s,t}^{*(i_1)} + \frac{1}{2} J_{2s,t}^{*(i_1)}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} J_{(\beta\alpha\alpha)s,t}^{*(i_3)} &\stackrel{def}{=} \int_t^s \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} dt_2 dt_3 = \int_t^s \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} dt_2 dt_3 = \\ &= \int_t^s d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)} \int_{t_1}^s dt_2 \int_{t_2}^s dt_3 = \frac{1}{2} J_{2s,t}^{(i_3)} = \frac{1}{2} J_{2s,t}^{*(i_3)}; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} J_{(\alpha\beta\alpha)s,t}^{*(i_2)} &\stackrel{def}{=} \int_t^s \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} dt_1 d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_3 = \int_t^s \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} dt_1 d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_3 = \\ &= \int_t^s (t_2-s+s-t) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^s dt_3 = \\ &= (s-t) J_{1s,t}^{(i_2)} - J_{2s,t}^{(i_2)} = (s-t) J_{1s,t}^{*(i_2)} - J_{2s,t}^{*(i_2)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя (18) - (25) в (13) при $r = 3$ получим после перегруппировки слагаемых разложение (17) при $r = 3$. Можно также показать, что утверждение теоремы справедливо и при $r > 3$. Для этого необходимо предположить, что утверждение теоремы справедливо для фиксированного r и преобразовать с помощью теорем 1 и 2 интегралы

$$J_{(\mu_{r+1} \dots \mu_1)s,t}^{*(i_{r+1} \dots i_1)}; \mu_1, \dots, \mu_{r+1} = \alpha \text{ или } \beta$$

к виду (16), после чего убедиться в справедливости равенства:

$$\sum_{(\mu_{r+1}, \dots, \mu_1)} (p_{r+1}) B_{\mu_{r+1} \dots \mu_1} \{\eta_t\}^{p_{r+1}} (p_{r+1}) J_{(\mu_{r+1} \dots \mu_1)s,t}^* =$$

$$= (B^{A_{r+1}}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)_*^{A_{r+1}}) \text{ с в.1.}$$

Отметим, что часть слагаемых в основной части разложения (17) имеет больший порядок малости в среднеквадратическом смысле, чем $(D_{r+1})_{s,t}$. С практической точки зрения при использовании (17) для построения численных методов это неудобно. Поэтому перепишем (17) в виде:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (B^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)_*^{\mathcal{D}_q}) + (H_{r+1})_{s,t} \text{ с в.1,} \quad (26)$$

где

$$(H_{r+1})_{s,t} \stackrel{\text{def}}{=} (B\{\eta_t\}^{\mathcal{U}_r} \odot (s \ominus t)_*^{\mathcal{U}_r}) + (D_{r+1})_{s,t},$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}, \quad (27)$$

$$\mathcal{U}_r = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p \leq r; \right. \\ \left. k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) \geq r + 1; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}, \quad (28)$$

а остальные обозначения, входящие в (26) такие же как в (17). Разложение (26) обладает тем свойством, что $(H_{r+1})_{s,t}$ имеет больший порядок малости в среднеквадратическом смысле, нежели члены основной части разложения (26). Разложение (26) будем называть первой формой унифицированного разложения Тейлора – Стратоновича.

Если $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, то в сумму

$$\sum_{q=1}^r (B^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)_*^{\mathcal{D}_q})$$

входят соответственно 2, 4, 7, 12, 20 и 33 различных повторных стохастических интеграла вида (16). В то же время основная часть разложения (13) содержит уже 2, 5, 9, 17, 29 и 51 различных повторных стохастических интеграл Стратоновича вида (15).

5 Вторая форма унифицированного разложения Тейлора – Стратоновича

Введем в рассмотрение повторные стохастические интегралы Стратоновича вида:

$$I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*s} (t - \tau_1)^{l_k} \dots \int_t^{*\tau_{k-1}} (t - \tau_k)^{l_1} d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)}; \quad k \geq 1,$$

где $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$.

Нетрудно видеть, что в силу аддитивности стохастических интегралов справедлива формула:

$$J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \sum_{j_1=0}^{l_1} \dots \sum_{j_k=0}^{l_k} \prod_{g=1}^k C_{l_g}^{j_g}(s-t)^{l_1+\dots+l_k-j_1-\dots-j_k} I_{j_1 \dots j_k,s,t}^{*(i_1 \dots i_k)} \text{ с в.1,}$$

где $C_l^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l!}{k!(l-k)!}$ – биномиальный коэффициент. Таким образом, разложение Тейлора – Стратоновича процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, $s \in [0, T]$ можно строить как по повторным стохастическим интегралам $J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)}$, что было сделано ранее, так и по повторным стохастическим интегралам $I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)}$. Этому вопросу посвящен данный параграф.

Введем обозначения:

$$^{(k)}(s \ominus t)_{j_1 \dots j_k}^* = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^m;$$

$$\begin{aligned}
(s\bar{\Theta}t)_*^{A_q} &= \{^{(k)}(s\bar{\Theta}t)_{jl_1\dots l_k}^* : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in A_q\}; \\
\bar{B}^{A_q} &= \{^{(k)}\bar{B}_{jl_1\dots l_k}\{\eta_\tau\} : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in A_q\}; \\
^{(k)}\bar{B}_{jl_1\dots l_k}\{\eta_\tau\} &= \prod_{g=1}^k \frac{1}{l_g!} \sum_{q_1=0}^{l_1} \dots \sum_{q_k=0}^{l_k} (-1)^{q_1+\dots+q_k} \prod_{g=1}^k C_{l_g}^{q_g} \times \\
&\times ^{(k)}B_{\alpha(q_1)\beta\alpha(l_1-q_1)\dots\alpha(q_k)\beta\alpha(l_k-q_k)\alpha(j)}\{\eta_\tau\} \text{ при } k \geq 1; \\
&\sum_{\emptyset}^{def} 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
^{(k)}\bar{B}_{jl_1\dots l_k}\{\eta_\tau\} &= B_{\alpha(j)}\{\eta_\tau\} \text{ при } k = 0; \\
\alpha(g) &= \underbrace{\alpha \dots \alpha}_g; \alpha(0)\beta = \beta, \beta\alpha(0) = \beta, \alpha\alpha(0) = \alpha, \alpha(0)\alpha = \alpha;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_l^k &\stackrel{def}{=} \frac{l!}{k!(l-k)!}; \\
(\bar{B}^{A_q} \odot (s\bar{\Theta}t)_*^{A_q}) &\stackrel{def}{=} \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in A_q} ^{(k)}\bar{B}_{jl_1\dots l_k}\{\eta_\tau\} \cdot ^{(k)}(s\bar{\Theta}t)_{jl_1\dots l_k}^*.
\end{aligned}$$

Теорема 2 Пусть выполнены условия, при которых справедливо разложение Тейлора – Стратоновича (13) [1]. Тогда

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\bar{B}^{A_q}\{\eta_t\} \odot (s\bar{\Theta}t)_*^{A_q}) + (D_{r+1})_{s,t} \text{ с в.1,} \quad (29)$$

где $(D_{r+1})_{s,t}$ имеет вид (14), а множество A_q такое же, как в формулировке теоремы 1.

Доказательство: Рассмотрим случай $r = 3$. По аналогии с выводом формул (18) – (25) с в.1 получим:

$$J_{(\alpha\beta)s,t}^{*(i_1)} = -I_{1s,t}^{*(i_1)}, \quad (30)$$

$$J_{(\beta\alpha)s,t}^{*(i_2)} = (s-t)I_{0s,t}^{*(i_2)} + I_{1s,t}^{*(i_2)}, \quad (31)$$

$$J_{(\alpha\beta\beta)s,t}^{*(i_2i_1)} = -I_{10s,t}^{*(i_2i_1)}, \quad (32)$$

$$J_{(\beta\beta\alpha)s,t}^{*(i_3i_2)} = (s-t)I_{00s,t}^{*(i_3i_2)} + I_{01s,t}^{*(i_3i_2)}, \quad (33)$$

$$J_{(\beta\alpha\beta)s,t}^{*(i_3i_1)} = I_{10s,t}^{*(i_3i_1)} - I_{01s,t}^{*(i_3i_1)}, \quad (34)$$

$$J_{(\beta\alpha\alpha)s,t}^{*(i_3)} = \frac{(s-t)^2}{2}I_{0s,t}^{*(i_3)} + (s-t)I_{1s,t}^{*(i_3)} + \frac{1}{2}I_{2s,t}^{*(i_3)}, \quad (35)$$

$$J_{(\alpha\beta\alpha)s,t}^{*(i_2)} = -(s-t)I_{1s,t}^{*(i_2)} - I_{2s,t}^{*(i_2)}, \quad (36)$$

$$J_{(\alpha\alpha\beta)s,t}^{*(i_1)} = \frac{1}{2}I_{2s,t}^{*(i_1)}. \quad (37)$$

Кроме этого

$$J_{(\underbrace{\beta\dots\beta}_l)_{s,t}}^{*(i_1\dots i_l)} \stackrel{def}{=} I_{\underbrace{0\dots 0}_{l,s,t}}^{*(i_1\dots i_l)}; \quad l = 1, 2, 3. \quad (38)$$

Подставляя (30) – (38) в (13) при $r = 3$ и перегруппировывая слагаемые получим (29) при $r = 3$. Для доказательства теоремы при $r > 3$ можно поступить также как при доказательстве теоремы 1.

Перепишем разложение (29) в виде:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\bar{B}^{D_q}\{\eta_t\} \odot (s\bar{\Theta}t)_*^{D_q}) + (\bar{H}_{r+1})_{s,t} \text{ с в.1,} \quad (39)$$

где

$$(\bar{H}_{r+1})_{s,t} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{B}\{\eta_t\}^{\mathcal{U}_r} \odot (s\bar{\Theta}t)_*^{\mathcal{U}_r}) + (D_{r+1})_{s,t},$$

где $(D_{r+1})_{s,t}$ имеет вид (14), $\mathcal{D}_q$ и $\mathcal{U}_r$ определяются равенствами (27) и (28) соответственно, а остальные обозначения входящие в (39) такие же, как в (29).

Разложение (39), в отличие от разложения (29), обладает тем свойством, что $(\bar{H}_{r+1})_{s,t}$ имеет больший порядок малости в среднеквадратическом смысле, нежели члены основной части разложения (39). Разложение (39) будем называть второй формой унифицированного разложения Тейлора – Стратоновича.

В заключение отметим, что в [3] (предложение 5.10.2, с.210) доказана сходимость с в.1 усеченного разложения Тейлора – Стратоновича (13) (без остаточного члена $(D_{r+1})_{s,t}$) к процессу η_s при $r \rightarrow \infty$ для всех $s, t \in [0, T]$; $T < \infty$. Поскольку разложения (17), (29) получены из разложения Тейлора – Стратоновича (13) без каких-либо дополнительных условий, то усеченные разложения (17), (29) (без остаточного члена $(D_{r+1})_{s,t}$) будут в условиях предложения 5.10.2 ([3], с.210) сходиться к процессу η_s с в.1 при $r \rightarrow \infty$ для всех $s, t \in [0, T]$; $T < \infty$.

Литература

- [1] Kloeden P.E., Platen E. The Stratonovich- and Ito-Taylor expansions // Math. Nachr., 1991, **151**, pp.33-50.
- [2] Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988, 225с.
- [3] Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992, 632p.
- [4] Wagner W., Platen E. Approximation of Ito integral equations // Preprint ZIMM, Akad. der. Wiss der DDR, Berlin, 1978, 27 pages.
- [5] Platen E., Wagner W. On a Taylor formula for a class of Ito processes // Prob. Math. Statist., 1982, **3**, pp.37-51.
- [6] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Унифицированное разложение Тейлора-Ито // Записки научных семинаров ПОМИ им.В.А.Стеклова. Вероятность и статистика 2, 1997, т.244, с.186-204.
- [7] Кузнецов Д.Ф. Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанное на кратных рядах Фурье // Записки научн. семин. ПОМИ им. В.А.Стеклова. Вероятность и статистика 3., т.260, 1999.
- [8] Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. СПб.: Наука, 1999, 459с.
- [9] Кузнецов Д.Ф. Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах. Деп. в ВИНТИ, 1997, **3607-B97** от 10.12.97, 31с.
- [10] Platen E. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations. Acta Numerica, 1999, **8**, p.195-244.
- [11] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. К.: Наукова Думка, 1968, 354с.
- [12] Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М: Изд-во МГУ, 1966, 320с.
- [13] Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 445с.
- [14] Kloeden P.E., Platen E. Relations between multiple Ito and Stratonovich integrals. Stoch. Anal. Appl., 1991, **9**, p.86-96.

Лицензия ЛР № 020593 от 7.08.97

Подписано в печать 04.10.99, Объем в п. л. 1,45

Тираж 50. Заказ № 546.

Отпечатано с готового оригинал-макета

в типографии Издательства СПбГТУ

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29