

Д.Ф.КУЗНЕЦОВ

**ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА
К СИЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1999

УДК 519.21, 518.61

Кузнецов Д.Ф. Применение полиномов Лежандра к сильной аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений. – СПб: Издательство СПбГТУ, 1999. – 17с.

Работа посвящена аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящих в разложение Тейлора – Стратоновича, с помощью метода, основанного на кратном ряде Фурье по полиномам Лежандра. Получены аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича кратностей 1 - 5 с помощью указанного метода. Результаты работы могут быть применены к численной реализации сильных численных методов порядков 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 для стохастических дифференциальных уравнений.

Библиогр. 27 назв., табл. 32.

Печатается с оригинал-макета, подготовленного автором

Издание осуществлено при поддержке Министерства общего и профессионального образования РФ (грант N 97-0-1.8-71).

© Д.Ф.Кузнецов, 1999

1 Введение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - полное вероятностное пространство, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ - неубывающее непрерывное справа семейство под σ -алгебр $\mathcal{F}$. Рассмотрим следующую систему стохастических дифференциальных уравнений в интегральной форме:

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s, s) ds + \int_0^t B(x_s, s) dw_s + \int_0^t \int_{\Gamma} c(x_s, s, y) \tilde{\nu}(dy, ds), \quad (1)$$

где $x_s \in \mathbb{R}^n$ - решение системы (1); $w_s \in \mathbb{R}^m - \mathcal{F}_s$ измеримый при всех $s \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $\Gamma = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$;

$$\tilde{\nu}(dy, ds) = \nu(dy, ds) - \pi(dy)ds;$$

$\nu(dy, ds)$ - целочисленная пуассоновская мера на $\Gamma \times [0, T]$; $M\{\nu(dy, ds)\} = \pi(dy)ds$; $\pi(dy)$ - мера интенсивности $\nu(dy, ds)$, причем $\pi(\Gamma) < \infty$; $a(x, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $B(x, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$; $c(x, s, y) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ - матричные функции; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ - начальное условие. Второй интеграл в правой части (1) понимается в смысле Ито, а третий следующим образом [1]:

$$\int_0^t \int_{\Gamma} c(x_s, s, y) \tilde{\nu}(dy, ds) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} c(x_{\tau_j}, \tau_j, y) \tilde{\nu}(dy, [\tau_j, \tau_{j+1})), \quad (2)$$

где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = t$; $\max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, предел понимается в среднеквадратическом смысле или по вероятности, в зависимости от свойств случайной функции $c(x, t, y)$. Предположим также, что функции a, B, c удовлетворяют условиям существования и единственности решения системы (1) [1].

Известно [2] - [7], что при $c \equiv 0$ различные частные случаи системы уравнений (1) являются адекватными математическими моделями ряда физических и технических систем. В том случае, когда в (1) присутствует слагаемое $\int_0^t \int_{\Gamma} c(x_s, s, y) \tilde{\nu}(dy, ds)$, эта система стохастических дифференциальных уравнений также нашла применение как математическая модель, в частности, в области финансовой математики [2], [3].

Известно, что один из эффективных подходов к численному интегрированию системы (1) при $c \equiv 0$ основан на разложениях Тейлора - Ито или Тейлора - Стратоновича [8] - [21], [23], [24], в которые входят системы повторных стохастических интегралов вида:

$$\int_t^s \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(i_1)} \dots dw_{t_k}^{(i_k)}, \quad (3)$$

$$\int_t^{*s} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(i_1)} \dots dw_{t_k}^{(i_k)}; \quad (4)$$

$\psi_1(s), \dots, \psi_k(s)$ - непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, s]$ функции; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; w_t ; $i = 1, \dots, m$ - независимые стандартные винеровские процессы; $w_t^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} t$; $\int^*$ - стохастический интеграл Стратоновича, $\int$ - стохастический интеграл Ито. При этом полагается $\int_a^{*b} g(s) dw_s^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b g(s) ds$, $\int_a^b g(s) dw_s^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b g(s) ds$.

В работе [15] был предложен подход к численному интегрированию системы (1), основанный на применении разложения Тейлора - Ито и метода Монте-Карло. Суть этого подхода в следующем. Промежуток интегрирования $[0, T]$ разбивается точками $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ так, чтобы среди τ_j ; $j = 0, 1, \dots, N$ встречались все моменты скачков пуассоновского процесса $\nu(\Gamma, [0, t])$. Если в точке τ_0 нет скачка $\nu(\Gamma, [0, t])$, то на промежутке $[0, \tau_0]$ процесс x_t

является диффузионным процессом, описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида:

$$x_t = x_0 + \int_0^t \left(a(x_s, u(s), s) - \int_{\Gamma} c(x_s, s, y) \pi(dy) \right) ds + \int_0^t B(x_s, s) dw_s$$

и может быть численно смоделирован в момент τ_0 , например, с помощью численных методов, основанных на разложении Тейлора - Ито или Тейлора - Стратоновича. Если в точке τ_0 есть скачок процесса $\nu(\Gamma, [0, t))$, то численно моделируется x_{τ_0-} ($x_{t-} \stackrel{\text{def}}{=} x_{t-0}$) с помощью численных методов, основанных на разложении Тейлора - Ито или Тейлора - Стратоновича и полагается:

$$x_{\tau_0} = x_{\tau_0-} + \int_{\Gamma} c(x_{\tau_0-}, \tau_0, y) \nu(dy, \{\tau_0\}). \quad (5)$$

Интеграл в правой части (5) моделируется с помощью метода Монте-Карло. Далее переходим к моменту времени τ_1 и повторяем описанную процедуру и т.д.

Таким образом мы видим, что численное решение не только стохастических дифференциальных уравнений Ито, но и стохастических дифференциальных уравнений более общего вида сводится на одном из своих этапов к совместному численному моделированию систем повторных стохастических интегралов вида (3), (4). При этом известно [8], [9], [18], [19], что каждый интеграл вида (3) может быть представлен в виде выражения, в которое входят интегралы вида (4) кратности $q \leq k$ и нестохастические слагаемые.

В [18] была доказана теорема о разложении повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (4) в кратный ряд из произведений стандартных гауссовских случайных величин, которая дает эффективный метод среднеквадратической аппроксимации этого интеграла. Приведем формулировку этой теоремы.

Теорема 1 Пусть выполнены условия:

1. $\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta)$ - непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, s]$ функции;
2. $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ - полная ортонормированная в пространстве $L_2([t, s])$ система непрерывно дифференцируемых функций, для которой ряд Фурье $\sum_{j=0}^{\infty} C_j \varphi_j(x)$, $C_j = \int_t^s f(y) \varphi_j(y) dy$ для любой кусочно-гладкой на открытом интервале (t, s) и ограниченной на промежутке $[t, s]$ функции $f(x)$ сходится для любого $x \in (t, s)$ к $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, конечен при $x = t, s$ и сходится равномерно к $f(x)$ в любом замкнутом интервале непрерывности $f(x)$.

Тогда

$$J^*[\psi^{(k)}]_{s,t} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)s,t}^{(i_l)}, \quad (6)$$

где

$$J^*[\psi^{(k)}]_{s,t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^{*s} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)};$$

$\zeta_{(j_l)s,t}^{(i_l)} = \int_t^s \phi_{j_l}(\theta) d\mathbf{w}_{\theta}^{(i_l)}$ - независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных i_l или j_l (если $i_l \neq 0$);

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t,s]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k.$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}; t_1, \dots, t_k \in [t, s]; k \geq 2,$$

ряд (6) сходится в среднеквадратическом смысле; $\mathbf{1}_A$ - индикатор множества A .

В монографии [19] показано, что ряд (6) сходится не только в среднеквадратическом смысле, но и в среднем степени n ; n - натуральное.

Теорема 1 дает эффективный метод аппроксимации интегралов $J^*[\psi^{(k)}]_{s,t}$:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{s,t}^q = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} \quad (7)$$

где $J^*[\psi^{(k)}]_{s,t}^q$ – аппроксимация интеграла $J^*[\psi^{(k)}]_{s,t}$, а $q < \infty$ выбирается из условия:

$$M \left\{ \left(J^*[\psi^{(k)}]_{s,t}^q - J^*[\psi^{(k)}]_{s,t} \right)^2 \right\} \leq \varepsilon; \varepsilon \geq 0. \quad (8)$$

В [19] приведена очень простая формула для вычисления $M \left\{ \left(J^*[\psi^{(k)}]_{s,t}^q - J^*[\psi^{(k)}]_{s,t} \right)^2 \right\}$ при попарно различных $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$:

$$M \left\{ \left(J^*[\psi^{(k)}]_{s,t}^q - J^*[\psi^{(k)}]_{s,t} \right)^2 \right\} = \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1}^2. \quad (9)$$

В работе [19] отмечалось, на примере стохастического интеграла второй кратности, что минимальная совокупность независимых стандартных гауссовских случайных величин, входящая в (7) в случае использования полиномиальной системы функций, примерно в три раза короче, чем аналогичная совокупность в случае использования тригонометрической системы функций. Кроме этого в [19] показано, что аппроксимация вида (7), полученная с использованием тригонометрической системы функций сходится примерно в три раза быстрее в среднеквадратическом смысле, чем аппроксимация, основанная на кратных интегральных суммах. Еще одним преимуществом полиномиальной системы функций перед тригонометрической при построении аппроксимаций вида (7) является то, что формулы вида (7) для конкретных стохастических интегралов являются более простыми. Таким образом среднеквадратические аппроксимации вида (7), полученные с использованием полиномиальной системы функций наиболее эффективны. Цель настоящей работы заключается в построении аппроксимаций вида (7) с использованием системы полиномов Лежандра для конкретных стохастических интегралов Стратоновича кратностей 1 - 5. С помощью построенных аппроксимаций могут быть численно реализованы сильные алгоритмы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений порядков точности 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5. Эти алгоритмы представлены в обширной литературе (см., например, [8] - [12], [15], [17] - [19], [23], [24]).

2 Минимальные совокупности повторных стохастических интегралов

В данном параграфе выделим минимальные совокупности повторных стохастических интегралов, необходимые для аппроксимаций решения стохастического дифференциального уравнения Ито (уравнение (1) при $c \equiv 0$) с порядками сходимости 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 и 2.5 в среднеквадратическом смысле. При этом будем использовать разложение Тейлора - Стратоновича [16], [18], [19].

Введем обозначения:

$$L_{x,t}\{\cdot\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\{\cdot\} + \sum_{i=1}^n a^{(i)}(x,t) \frac{\partial}{\partial x^{(i)}}\{\cdot\} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n B^{(lj)}(x,t) B^{(ij)}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^{(l)} \partial x^{(i)}}\{\cdot\};$$

$$G_{x,t}^{(i)}\{\cdot\} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n B^{(ji)}(x,t) \frac{\partial}{\partial x^{(j)}}\{\cdot\}; \quad i = 1, \dots, m;$$

$$L_{x,\tau}\{g(x_\tau, \tau)\} \stackrel{\text{def}}{=} L\{g(x_\tau, \tau)\}, \quad G_{x,\tau}^{(i)}\{g(x_\tau, \tau)\} \stackrel{\text{def}}{=} G^{(i)}\{g(x_\tau, \tau)\};$$

$$\bar{L}\{g(x_\tau, \tau)\} \stackrel{\text{def}}{=} L\{g(x_\tau, \tau)\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m G^{(i)} G^{(i)}\{g(x_\tau, \tau)\};$$

$$^{(l)}A = \|A^{(i_1 \dots i_l)}\|_{i_1=1, \dots, i_l=1}^{m_1 \dots m_l}; \quad ^{(l)}A \cdot ^{(l)}B = \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_l=1}^{m_l} A^{(i_1 \dots i_l)} B^{(i_1 \dots i_l)}; m_1, \dots, m_l \geq 1;$$

$$^{(p_l)}J_{(\mu_1 \dots \mu_l)s,t}^* = \|J_{(\mu_1 \dots \mu_l)s,t}^{*(i_1 \dots i_l)}\|_{i_1=\delta_1, \dots, i_l=\delta_l}^{m_{\delta_1} \dots m_{\delta_l}},$$

$$J_{(\mu_1 \dots \mu_l)s,t}^{*(i_1 \dots i_l)} = \int_t^{*s} \dots \int_t^{*T_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_l)} \text{ при } l \geq 1;$$

$$B_{\alpha\mu_{l-1} \dots \mu_1}^{(i_{l-1} \dots i_1)} \{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} = \bar{L} B_{\mu_{l-1} \dots \mu_1}^{(i_{l-1} \dots i_1)} \{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}; \quad l = 2, 3, \dots;$$

$$B_{\beta\mu_{l-1} \dots \mu_1}^{(i_{l-1} \dots i_1)} \{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} = G^{(i_l)} B_{\mu_{l-1} \dots \mu_1}^{(i_{l-1} \dots i_1)} \{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}; \quad l = 2, 3, \dots;$$

$$B_\alpha \{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{L} \{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}; \quad B_\beta^{(i_1)} \{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} \stackrel{\text{def}}{=} G^{(i_1)} \{g(\mathbf{x}_\tau, \tau)\};$$

$g(\mathbf{x}, t)$ – некоторая функция; $\mu_l = \alpha$ или β ; $p_l = \sum_{j=1}^l \delta_j$; $\delta_l = 0$ и $i_l = 0$ при $\mu_l = \alpha$; $\delta_l = 1$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\mu_l = \beta$; обозначение $\cdot$ понимается как обычное умножение; $\mathbf{w}_\tau^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) – независимые стандартные винеровские процессы; $\mathbf{w}_\tau^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$; $i_1, \dots, i_l = 0, 1, \dots, m$.

Запишем сильный численный метод порядка 2.5 для стохастического дифференциального уравнения Ито (уравнение (1) при $\mathbf{c} \equiv 0$), основанный на разложении Тейлора – Стратоновича [16], [18], [19]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + ^{(1)}B_\beta \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(1)}\hat{J}_{(\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + B_\alpha \{\mathbf{y}_p\} \Delta + ^{(2)}B_{\beta\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(2)}\hat{J}_{(\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* \\ & + ^{(1)}B_{\alpha\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(1)}\hat{J}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(1)}B_{\beta\alpha} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(1)}\hat{J}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(3)}B_{\beta\beta\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(3)}\hat{J}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* \\ & + ^{(2)}B_{\beta\alpha\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(2)}\hat{J}_{(\beta\alpha\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(2)}B_{\alpha\beta\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(2)}\hat{J}_{(\alpha\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(2)}B_{\beta\beta\alpha} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(2)}\hat{J}_{(\beta\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^* \\ & + B_{\alpha\alpha} \{\mathbf{y}_p\} \frac{\Delta^2}{2} + ^{(4)}B_{\beta\beta\beta\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(4)}\hat{J}_{(\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(1)}B_{\beta\alpha\alpha} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(1)}\hat{J}_{(\beta\alpha\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^* \\ & + ^{(1)}B_{\alpha\beta\alpha} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(1)}\hat{J}_{(\alpha\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(1)}B_{\alpha\alpha\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(1)}\hat{J}_{(\alpha\alpha\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(3)}B_{\beta\beta\beta\alpha} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(3)}\hat{J}_{(\beta\beta\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^* \\ & + ^{(3)}B_{\beta\beta\alpha\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(3)}\hat{J}_{(\beta\beta\alpha\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(4)}B_{\beta\alpha\beta\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(4)}\hat{J}_{(\beta\alpha\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(3)}B_{\alpha\beta\beta\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(3)}\hat{J}_{(\alpha\beta\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* \\ & + ^{(5)}B_{\beta\beta\beta\beta\beta} \{\mathbf{y}_p\} \cdot ^{(5)}\hat{J}_{(\beta\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^*, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\tau_p = p\Delta$; $p = 0, 1, \dots, N$, $\Delta = T/N$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ и предполагается, что выполнены условия существования правой части (10).

Если удерживать в правой части (10) первые 3 слагаемых, то получим метод Эйлера, который сходится при определенных условиях [8] – [10] сильно с порядком $\gamma = 0.5$ к решению стохастического дифференциального уравнения Ито, т.е.

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \leq K\Delta^\gamma,$$

где постоянная K не зависит от Δ . Для численной реализации метода Эйлера необходимо численно моделировать стохастические интегралы $J_{(\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i)}$; $i = 1, \dots, m$. Для этого используются простые соотношения:

$$J_{(\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_p^{(i)},$$

где $\zeta_p^{(i)}$ – независимые при различных p или i стандартные гауссовские случайные величины.

Если в правой части (10) удерживать первые четыре слагаемых, то получим метод Г.Н.Мильштейна, сходящийся при определенных условиях [8] – [10], [18], [19] сильно с порядком $\gamma = 1.0$ к решению стохастического дифференциального уравнения Ито. Для численной

реализации данного метода необходимо совместно численно моделировать стохастические интегралы

$$J_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, J_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}; i_1, i_2 = 1, \dots, m. \quad (11)$$

Удержим в правой части (10) первые семь слагаемых. В результате получим численный метод, сходящийся при подходящих условиях [8] - [10], [18], [19] сильно с порядком $\gamma = 1.5$ к решению стохастического дифференциального уравнения Ито. Для численной реализации данного метода необходимо численно моделировать следующую совокупность повторных стохастических интегралов:

$$J_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, J_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}; J_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(0i_1)}; J_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 0)}; J_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m. \quad (12)$$

Совокупность (12) не является минимальной в том смысле, что интегралы $J_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(0i_1)}$; $J_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 0)}$ могут быть выражены друг через друга. Действительно, с помощью леммы 1 [20] и теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито [18], [19], [22] можно показать, что с в.1

$$J_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(0i_1)} = -I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}; J_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 0)} = \Delta I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2)} + I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2)},$$

где здесь и далее

$$I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*s} (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}; i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m; l_1, \dots, l_k \in N.$$

Таким образом минимальная совокупность повторных стохастических интегралов, необходимая для реализации сильного численного метода порядка 1.5 имеет вид:

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}, I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m. \quad (13)$$

Перейдем к рассмотрению минимальных совокупностей повторных стохастических интегралов, необходимых для численной реализации сильных численных методов порядков 2.0 и 2.5.

С помощью леммы 1 [20] и теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито [18], [19], [22] с в.1 имеем:

$$J_{(\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(0i_2 i_1)} = -I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}, \quad (14)$$

$$J_{(\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 0)} = \Delta I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2)} + I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2)}, \quad (15)$$

$$J_{(\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 0 i_1)} = I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_1)} - I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_1)}. \quad (16)$$

Удержим первые 12 слагаемых в правой части (10). В результате получим численный метод, сходящийся при определенных условиях [8] - [10], [18], [19] сильно с порядком $\gamma = 2.0$ к решению стохастического дифференциального уравнения Ито. Таким образом, согласно (14) - (16), минимальная совокупность повторных стохастических интегралов, необходимая для численной реализации данного численного метода имеет следующий вид:

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}, I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}, I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}, I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}, I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}; i_1, \dots, i_4 = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Развивая рассматриваемый подход с в.1 получим:

$$J_{(\beta\alpha\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 0 0)} = \frac{\Delta^2}{2} I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3)} + \Delta I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3)} + \frac{1}{2} I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3)}, \quad (18)$$

$$J_{(\alpha\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(0i_2 0)} = -\Delta I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2)} - I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2)}, \quad (19)$$

$$J_{(\alpha\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(00i_1)} = \frac{1}{2} I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, \quad (20)$$

$$J_{(\beta\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 0)} = \Delta I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2)} + \Delta I_{001\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2)}, \quad (21)$$

$$J_{(\alpha\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(0 i_3 i_2 i_1)} = -\Delta I_{100\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}, \quad (22)$$

$$J_{(\beta\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 0 i_2 i_1)} = -I_{010\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_2 i_1)} + I_{100\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_2 i_1)}, \quad (23)$$

$$J_{(\beta\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 0 i_1)} = I_{010\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_1)} + I_{001\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_1)}. \quad (24)$$

Из (18) - (24) следует, что минимальная совокупность повторных стохастических интегралов, необходимая для численной реализации численного метода (10) имеет следующий вид:

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}, I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}, I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}, I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}, I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}, I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, \\ I_{001\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}, I_{100\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}, I_{010\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}, I_{00000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}, i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m. \quad (25)$$

Далее будем называть совокупности (11), (13), (17), (25) - 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 минимальными совокупностями стохастических интегралов соответственно.

3 Численное моделирование 1.0 минимальной совокупности стохастических интегралов

Для построения аппроксимаций вида (7) будем использовать полную ортонормированную в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ систему многочленов Лежандра:

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{\Delta}} P_j \left(\left(x - \frac{2t + \Delta}{2} \right) \frac{2}{\Delta} \right); j = 0, 1, \dots,$$

где $P_j(x)$ - классический полином Лежандра: $P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j$.

Отметим некоторые известные свойства полиномов $P_j(x)$, которые будем использовать при вычислении коэффициентов кратных рядов Фурье:

$$\frac{dP_{j+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{j-1}(x)}{dx} = (2j+1)P_j(x); j = 1, 2, \dots; \quad (26)$$

$$\int_{-1}^1 x^k P_j(x) dx = 0; k = 0, 1, 2, \dots, j-1; \quad (27)$$

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j \\ \frac{2}{2j+1} & \text{при } k = j \end{cases}; \quad (28)$$

$$jP_j(x) - (2j-1)xP_{j-1}(x) + (j-1)P_{j-2}(x) = 0; j = 2, 3, \dots \quad (29)$$

Используя (26) - (29) получим частный вид формулы (7) для стохастического интеграла $I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}$; $i_1 \neq i_2$; $i_1, i_2 = 1, \dots, m$:

$$I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)q} = \frac{\Delta}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i-1}^{(i_1)} \right\} \right], \quad (30)$$

где $\zeta_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$.

Если $i_1 = i_2 \neq 0$, то используя формулу Ито или (30) при $i_1 = i_2$, $q = \infty$ с в.1 получим:

$$I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_1)} = \frac{\Delta}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^2. \quad (31)$$

Кроме этого следует положить

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}. \quad (32)$$

Формулы (30) - (32) позволяют численно моделировать 1.0 - минимальную совокупность стохастических интегралов.

Из (9) и (30) получаем:

$$M \left\{ \left(I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)} - I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right). \quad (33)$$

Одним из требований, обеспечивающих сильную сходимость порядка 1.0 метода Г.Н. Мильштейна является выполнение условия [8] - [10], [18], [19]:

$$M \left\{ \left(I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)} - I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} \leq C \Delta^3, \quad (34)$$

где постоянная C не зависит от Δ и считается заданной. Объединяя (33), (34) приходим к следующему условию для определения минимального числа q :

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \leq C \Delta. \quad (35)$$

4 Численное моделирование 1.5 минимальной совокупности стохастических интегралов

Для того, чтобы численно смоделировать 1.5 минимальную совокупность стохастических интегралов мы должны дополнить (30) - (32) формулами для аппроксимаций стохастических интегралов $I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}$, $I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}$; $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$.

Имеем:

$$I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right) \text{ с в.1}, \quad (36)$$

$$I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)q_1} = \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{ijk} \zeta_k^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_3)}, \quad (37)$$

где

$$C_{ijk} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^z \int_{\tau_p}^y \phi_k(x) dx \phi_j(y) dy \phi_i(z) dz.$$

Нетрудно видеть, что

$$C_{ijk} = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{8} \Delta^{3/2} \bar{C}_{ijk}, \quad \bar{C}_{ijk} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_k(x) dx P_j(y) dy P_i(z) dz.$$

Получение аналитической формулы для $\bar{C}_{ijk}$ при произвольных i, j, k затруднительно. Однако число q_1 в (37) может быть небольшим, в то время как погрешность среднеквадратической аппроксимации определяемая при $i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, i_3 \neq i_2$ формулой:

$$\Delta^3 \left(\frac{1}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} \bar{C}_{ijk}^2 \right); \quad \tilde{C}_{ijk} = C_{ijk} / \Delta^{3/2} \quad (38)$$

будет вполне приемлемой.

Положим $q_1 = 5$. В таблицах 1 - 6 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{ijk}$ при $i, j, k = 0, 1, \dots, 5$ (правильность вычислений здесь и далее контролировалась с помощью символьного пакета математических преобразований DERIVE). Вычисляя значение выражения (38) при $q_1 = 5$ и учитывая требование вида:

$$M \left\{ \left(I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} - I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)q_1} \right)^2 \right\} \leq C \Delta^4,$$

обеспечивающее сильную сходимость порядка 2.0 численной схемы, в которую входят рассматриваемые стохастические интегралы [8] - [10], [18], [19], получим при $i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, i_3 \neq i_2$:

$$0.0230976 \leq C\Delta, \quad (39)$$

где C например равно 1. При этом левая часть (39) вычислена точно.

Условие (35) теперь, в силу требования, обеспечивающего сильную сходимость порядка 2.0 численной схемы, должно быть заменено на следующее условие:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \leq C\Delta^2. \quad (40)$$

Если $i_1 = i_2 = i_3$, то с помощью формулы Ито получим:

$$I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_1 i_1)} = \frac{\Delta^3}{6} (\zeta_0^{(i_1)})^3 \text{ с в.1.} \quad (41)$$

В том случае, когда выполняется одно из условий: $i_1 = i_2 \neq i_3, i_1 = i_3 \neq i_2, i_2 = i_3 \neq i_1$ существенная часть слагаемых в формуле (37) будет отсутствовать в силу симметрии. Формула типа (38) может быть получена и в каждом из случаев: $i_1 = i_2 \neq i_3, i_1 = i_3 \neq i_2, i_2 = i_3 \neq i_1$.

5 Численное моделирование 2.0 минимальной совокупности стохастических интегралов

2.0 минимальная совокупность включает помимо стохастических интегралов образующих 1.5 минимальную совокупность следующие стохастические интегралы: $I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)}$, $I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)}$, $I_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}$; $i_1, \dots, i_4 = 1, \dots, m$.

Далее имеем:

$$\begin{aligned} I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1) q_2} = & -\frac{\Delta^2}{4} \left[\frac{4}{3} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{2}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_2^{(i_1)} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{q_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i-1}^{(i_1)} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \zeta_i^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \left((i+2) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} - (i+1) \zeta_{i+2}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} \right) \right\} \right], \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1) q_2} = & -\frac{\Delta^2}{4} \left[\frac{2}{3} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{q_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+1}^{(i_2)} + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \left((i+1) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} - (i+2) \zeta_{i+2}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} \right) \right\} \right]. \quad (43) \end{aligned}$$

Из (42) и (43) при $i_1 = i_2$ получаем:

$$I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_1) q_2} + I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_1) q_2} = -\frac{\Delta^2}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right) \zeta_0^{(i_1)}. \quad (44)$$

Далее при $i_1 = i_2$ получаем

$$M \left\{ \left(I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1) q_2} \right)^2 \right\} = M \left\{ \left(I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1) q_2} \right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{\Delta^4}{16} \left\{ \frac{7}{9} - \sum_{i=1}^{q_2} \left(\frac{1}{4i^2 - 1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} + \frac{(i+2)^2 + (i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} \right) \right\} \leq C\Delta^5. \quad (45)$$

Величина $C\Delta^5$ в правой части (45) продиктована условием, обеспечивающим сильную сходимость порядка 2.0 численной схемы, в которую входят рассматриваемые стохастические интегралы [8] - [10], [18], [19].

Рассмотрим случай $i_1 = i_2$. В [18], [19] доказано следующее утверждение.

Лемма 1 Пусть $w_t \in \mathbb{R}^1$ - стандартный винеровский процесс, а $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$ - полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t, T])$. Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{i=1}^{2k} \int_t^T \phi_{r_i}(\tau) dw_\tau \right\} = \begin{cases} (2g+1)!! & \text{при } \{r_1, \dots, r_{2k}\} = \{q_1, q_1, \dots, q_k, q_k\} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases},$$

где g - количество совпадений чисел в наборе $\{q_1, \dots, q_k\}$; $g \geq 0$; $r_i = 0, 1, \dots$; $r_i \neq r_j$ ($i \neq j$); $i, j = 1, \dots, 2k$; $\{x_1, \dots, x_k\}$ - неупорядоченный набор чисел $x_1, \dots, x_k$.

Используя лемму 1 получим при $i_1 = i_2$ следующую формулу:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_1)} - I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_1) q_2} \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left(I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_1)} - I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_1) q_2} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{\Delta^4}{16} \left[\sum_{i=q_2+1}^\infty \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \sum_{i=q_2+1}^\infty \frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{i=q_2+1}^\infty \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \right)^2 \right] \leq C\Delta^5. \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению аппроксимации стохастического интеграла $I_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}$. Имеем:

$$I_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1) q_3} = \sum_{i,j,k,l=0}^{q_3} C_{ijkl} \zeta_l^{(i_1)} \zeta_k^{(i_2)} \zeta_j^{(i_3)} \zeta_i^{(i_4)}, \quad (46)$$

$$C_{ijkl} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^u \int_{\tau_p}^z \int_{\tau_p}^y \phi_l(x) dx \phi_k(y) dy \phi_j(z) dz \phi_i(u) du = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)}}{16} \Delta^2 \bar{C}_{ijkl},$$

где

$$\bar{C}_{ijkl} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^u \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_l(x) dx P_k(y) dy P_j(z) dz P_i(u) du.$$

Выберем, например, $q_3 = 2$. В таблицах 7 - 15 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{ijkl}$; $i, j, k, l = 0, 1, 2$. При попарно различных i, j, k, l имеем следующее соотношение для выбора шага интегрирования Δ при $q_3 = 2$:

$$\Delta^4 \left(\frac{1}{24} - \sum_{i,j,k,l=0}^2 \bar{C}_{ijkl}^2 \right) \leq C\Delta^5; \bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl}/\Delta^2. \quad (47)$$

Вычисляя точно с помощью результатов, приведенных в таблицах 7 - 15 правую часть (47), получим:

$$0.0236084 \leq C\Delta. \quad (48)$$

Рассмотрим случай $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$. С помощью формулы Ито получим:

$$I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1 i_1 i_1 i_1)} = \frac{\Delta^4}{24} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^4 \text{ с в.л.} \quad (49)$$

Если i_1, i_2, i_3, i_4 не являются попарно различными, то часть слагаемых в правой части (46) будет отсутствовать в силу симметрии. В случае $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$ останется вообще одно слагаемое (см. (49)).

6 Численное моделирование 2.5 минимальной совокупности стохастических интегралов

2.5 минимальная совокупность включает кроме стохастических интегралов образующих 2.0 минимальную совокупность следующие стохастические интегралы: $I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}$, $I_{001\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{100\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{010\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{00000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}$, $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$.

Далее имеем:

$$I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} = \frac{\Delta^{5/2}}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \right) \text{ с в.л.},$$

$$I_{001\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)q_4} = \sum_{i,j,k=0}^{q_4} C_{ijk}^{001} \zeta_k^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_3)},$$

$$I_{010\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)q_5} = \sum_{i,j,k=0}^{q_5} C_{ijk}^{010} \zeta_k^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_3)},$$

$$I_{100\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)q_6} = \sum_{i,j,k=0}^{q_6} C_{ijk}^{100} \zeta_k^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_3)},$$

$$I_{00000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)q_7} = \sum_{i,j,k,l,r=0}^{q_7} C_{ijklr} \zeta_r^{(i_1)} \zeta_l^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_j^{(i_4)} \zeta_i^{(i_5)},$$

где

$$C_{ijk}^{001} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^z \int_{\tau_p}^y \phi_k(x) dx \phi_j(y) dy (\tau_p - z) \phi_i(z) dz = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16} \Delta^{5/2} \bar{C}_{ijk}^{001},$$

$$C_{ijk}^{010} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^z \int_{\tau_p}^y \phi_k(x) dx (\tau_p - y) \phi_j(y) dy \phi_i(z) dz = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16} \Delta^{5/2} \bar{C}_{ijk}^{010},$$

$$C_{ijk}^{100} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^z \int_{\tau_p}^y (\tau_p - x) \phi_k(x) dx \phi_j(y) dy \phi_i(z) dz = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16} \Delta^{5/2} \bar{C}_{ijk}^{100},$$

$$\begin{aligned} C_{ijklr} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^v \int_{\tau_p}^u \int_{\tau_p}^z \int_{\tau_p}^y \phi_r(x) dx \phi_l(y) dy \phi_k(z) dz \phi_j(u) du \phi_i(v) dv = \\ &= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)(2r+1)}}{32} \Delta^{5/2} \bar{C}_{ijklr}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{C}_{ijk}^{100} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_k(x)(x+1) dx P_j(y) dy P_i(z) dz, \quad \bar{C}_{ijk}^{010} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_k(x) dx P_j(y)(y+1) dy P_i(z) dz,$$

$$\bar{C}_{ijk}^{001} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_k(x) dx P_j(y) dy P_i(z) (z+1) dz,$$

$$\bar{C}_{ijklr} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^v \int_{-1}^u \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_r(x) dx P_l(u) du P_k(z) dz P_j(u) du P_i(v) dv.$$

Выберем $q_4 = q_5 = q_6 = 2$, $q_7 = 1$. В таблицах 16 - 32 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{ijk}^{001}$, $\bar{C}_{ijk}^{010}$, $\bar{C}_{ijk}^{001}$; $i, j, k = 0, 1, 2$; $\bar{C}_{ijklr}$; $i, j, k, l, r = 0, 1$.

В случае попарно различных i, j, k, l, r имеем:

$$\Delta^5 \left(\frac{1}{60} - \sum_{i,j,k=0}^2 (\tilde{C}_{ijk}^{100})^2 \right) \leq C \Delta^6; \tilde{C}_{ijk}^{100} = C_{ijk}^{100} / \Delta^{5/2}, \quad (50)$$

$$\Delta^5 \left(\frac{1}{20} - \sum_{i,j,k=0}^2 (\tilde{C}_{ijk}^{010})^2 \right) \leq C \Delta^6; \tilde{C}_{ijk}^{010} = C_{ijk}^{010} / \Delta^{5/2}, \quad (51)$$

$$\Delta^5 \left(\frac{1}{10} - \sum_{i,j,k=0}^2 (\tilde{C}_{ijk}^{001})^2 \right) \leq C \Delta^6; \tilde{C}_{ijk}^{001} = C_{ijk}^{001} / \Delta^{5/2}. \quad (52)$$

$$\Delta^5 \left(\frac{1}{120} - \sum_{i,j,k,l,r=0}^1 \tilde{C}_{ijklr}^2 \right) \leq C \Delta^6; \tilde{C}_{ijklr} = C_{ijklr} / \Delta^{5/2}. \quad (53)$$

Происхождение величины $C \Delta^6$ в правых частях (50) - (53) вызвано требованием, обеспечивающим сильную сходимость порядка 2.5 численного метода, в который входят моделируемые стохастические интегралы [8] - [10], [18], [19]. Соотношения (50) - (53) позволяют оценить допустимый минимальный шаг интегрирования Δ при $q_4 = q_5 = q_6 = 2$, $q_7 = 1$. Если мы выберем $q_4, q_5, q_6 > 2$, $q_7 > 1$, то очевидно допустимый минимальный шаг интегрирования Δ станет меньше. Используя результаты, приведенные в таблицах 16 - 32 перепишем (50) - (53) в виде

$$0.00815429 \leq C \Delta, \quad (54)$$

$$0.0173903 \leq C \Delta, \quad (55)$$

$$0.0252801 \leq C \Delta, \quad (56)$$

$$0.00759105 \leq C \Delta \quad (57)$$

соответственно. Отметим, что левые части неравенств (54) - (57) вычислены точно.

В заключении отметим, что при моделировании γ минимальной ($\gamma = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$) совокупности стохастических интегралов минимальная длина последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин $\zeta_j^{(i)}$, необходимая для аппроксимации каждого стохастического интеграла из γ минимальной совокупности должна определяться из требования, обеспечивающего сильную сходимость порядка γ рассматриваемого численного метода [8] - [10], [18], [19]. Это требование заключается в том, что вторые моменты погрешностей аппроксимаций всех стохастических интегралов, входящих в γ минимальную совокупность не должны превосходить $C \Delta^{\gamma+1}$ [8] - [10], [18], [19], где постоянная C не зависит от Δ и считается заданной.

$$\bar{C}_{0jk}$$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	0	0	0
1	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{4}{105}$	0	0
2	$-\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{105}$	0
3	0	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{315}$	$-\frac{2}{63}$	$\frac{8}{693}$
4	0	0	$-\frac{8}{315}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{2}{693}$	$-\frac{2}{99}$
5	0	0	0	$-\frac{10}{693}$	$\frac{2}{99}$	$\frac{2}{1287}$

таблица 1

$$\bar{C}_{1jk}$$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{15}$	0	$\frac{2}{105}$	0	0
1	$\frac{2}{15}$	0	$-\frac{4}{105}$	0	$\frac{2}{315}$	0
2	$-\frac{2}{15}$	$\frac{8}{105}$	0	$-\frac{2}{105}$	0	$\frac{4}{1155}$
3	$-\frac{2}{35}$	0	$\frac{8}{315}$	0	$-\frac{38}{3465}$	0
4	0	$-\frac{4}{315}$	0	$\frac{46}{3465}$	0	$-\frac{64}{9009}$
5	0	0	$-\frac{4}{693}$	0	$\frac{74}{9009}$	0

таблица 2

$$\bar{C}_{2jk}$$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{2}{15}$	0	$-\frac{4}{105}$	0	$\frac{2}{315}$	0
1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{4}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$	0	$\frac{8}{3465}$
2	$\frac{2}{105}$	0	0	0	$-\frac{2}{495}$	0
3	$-\frac{2}{35}$	$\frac{8}{315}$	0	$-\frac{2}{3465}$	0	$-\frac{116}{45045}$
4	$-\frac{8}{315}$	0	$\frac{4}{495}$	0	$-\frac{2}{6435}$	0
5	0	$-\frac{4}{693}$	0	$\frac{38}{9009}$	0	$-\frac{8}{45045}$

таблица 3

$$\bar{C}_{3jk}$$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	0	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{4}{315}$	0	$\frac{2}{693}$
1	$\frac{4}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$	0	$-\frac{8}{3465}$	0
2	$\frac{2}{35}$	$-\frac{2}{105}$	0	$\frac{4}{3465}$	0	$-\frac{74}{45045}$
3	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{2}{3465}$	0	$\frac{16}{45045}$	0
4	$-\frac{2}{63}$	$\frac{46}{3465}$	0	$-\frac{32}{45045}$	0	$\frac{2}{9009}$
5	$-\frac{10}{693}$	0	$\frac{38}{9009}$	0	$-\frac{4}{9009}$	0

таблица 4

$$\bar{C}_{4jk}$$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{4}{693}$	0
1	0	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{8}{3465}$	0	$-\frac{10}{9009}$
2	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{2}{495}$	0	$\frac{4}{6435}$	0
3	$\frac{2}{63}$	$-\frac{38}{3465}$	0	$\frac{16}{45045}$	0	$\frac{2}{9009}$
4	$\frac{2}{693}$	0	$-\frac{2}{6435}$	0	0	0
5	$-\frac{2}{99}$	$\frac{74}{9009}$	0	$-\frac{4}{9009}$	0	$-\frac{2}{153153}$

таблица 5

$$\bar{C}_{5jk}$$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	$\frac{2}{693}$	0	$-\frac{4}{1287}$
1	0	0	$\frac{8}{3465}$	0	$-\frac{10}{9009}$	0
2	0	$\frac{4}{1155}$	0	$-\frac{74}{45045}$	0	$\frac{16}{45045}$
3	$\frac{8}{693}$	0	$-\frac{116}{45045}$	0	$\frac{2}{9009}$	0
4	$\frac{2}{99}$	$-\frac{64}{9009}$	0	$\frac{2}{9009}$	0	$\frac{4}{153153}$
5	$\frac{2}{1287}$	0	$-\frac{8}{45045}$	0	$-\frac{2}{153153}$	0

таблица 6

$$\bar{C}_{00kl}$$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$
1	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{21}$
2	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{105}$

таблица 7

$$\bar{C}_{10kl}$$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{35}$
1	$-\frac{2}{45}$	$\frac{2}{35}$	$-\frac{2}{45}$
2	$-\frac{2}{21}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{2}{315}$

таблица 8

$$\bar{C}_{02kl}$$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{4}{105}$
1	$\frac{2}{35}$	$-\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$
2	$\frac{4}{105}$	$-\frac{2}{105}$	0

таблица 9

$$\bar{C}_{01kl}$$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{45}$	$-\frac{2}{105}$
1	$\frac{2}{45}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{2}{315}$
2	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{315}$

таблица 10

$$\bar{C}_{11kl}$$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{35}$	0
1	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$
2	$-\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$	0

таблица 11

$$\bar{C}_{20kl}$$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{35}$	0
1	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$
2	$-\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$	0

таблица 12

$$\bar{C}_{21kl}$$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$\frac{2}{21}$	$-\frac{2}{45}$	$\frac{2}{315}$
1	$\frac{2}{315}$	$\frac{2}{315}$	$-\frac{2}{225}$
2	$-\frac{2}{105}$	$\frac{2}{225}$	$\frac{2}{1155}$

таблица 13

$$\bar{C}_{12kl}$$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{45}$	$-\frac{2}{105}$
1	$\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{2}{225}$
2	$\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{225}$	$-\frac{2}{3465}$

таблица 14

$$\bar{C}_{22kl}$$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{315}$	0
1	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{2}{1155}$
2	0	$\frac{2}{3465}$	0

таблица 15

$$\bar{C}_{0jk}^{001}$$

$j \backslash k$	0	1	2
0	-2	$\frac{14}{15}$	$-\frac{2}{15}$
1	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{6}{35}$
2	$\frac{2}{5}$	$-\frac{22}{105}$	$-\frac{2}{105}$

таблица 16

$$\bar{C}_{1jk}^{000}$$

$j \backslash k$	0	1	2
0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{22}{45}$	$-\frac{2}{105}$
1	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{26}{315}$
2	$\frac{22}{105}$	$-\frac{38}{315}$	$-\frac{2}{315}$

таблица 17

$$\bar{C}_{2jk}^{001}$$

$j \backslash k$	0	1	2
0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{22}{105}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$
2	0	$-\frac{2}{105}$	0

таблица 18

$$\bar{C}_{0jk}^{100}$$

$j \backslash k$	0	1	2
0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
1	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{45}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{35}$	$-\frac{4}{105}$

таблица 19

$$\bar{C}_{1jk}^{100}$$

$j \backslash k$	0	1	2
0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{2}{21}$
1	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{2}{105}$
2	$\frac{2}{35}$	$-\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{105}$

таблица 20

$$\bar{C}_{2jk}^{100}$$

$j \backslash k$	0	1	2
0	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{315}$	$\frac{2}{105}$
2	$-\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{315}$	0

таблица 21

$$\bar{C}_{0jk}^{010}$$

$j \backslash k$	0	1	2
0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{15}$	0
1	$-\frac{4}{15}$	0	$\frac{8}{105}$
2	$\frac{4}{15}$	$-\frac{16}{105}$	0

таблица 22

$$\bar{C}_{1jk}^{010}$$

$j \backslash k$	0	1	2
0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{105}$
2	$\frac{4}{35}$	$-\frac{8}{105}$	0

таблица 23

$$\bar{C}_{2jk}^{010}$$

$j \backslash k$	0	1	2
0	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{315}$
2	$-\frac{4}{105}$	0	0

таблица 24

$$\bar{C}_{000lr}$$

$l \backslash r$	0	1
0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{8}{45}$
1	$-\frac{4}{45}$	$\frac{8}{105}$

таблица 25

$$\bar{C}_{010lr}$$

$l \backslash r$	0	1
0	$\frac{4}{45}$	$-\frac{16}{315}$
1	$-\frac{4}{315}$	$\frac{4}{315}$

таблица 26

$$\bar{C}_{110lr}$$

$l \backslash r$	0	1
0	$\frac{8}{105}$	$-\frac{2}{45}$
1	$-\frac{4}{315}$	$\frac{4}{315}$

таблица 27

$$\bar{C}_{011lr}$$

$l \backslash r$	0	1
0	$\frac{8}{315}$	$-\frac{4}{315}$
1	0	$\frac{2}{945}$

таблица 28

$$\bar{C}_{001lr}$$

$l \backslash r$	0	1
0	0	$\frac{4}{315}$
1	$\frac{8}{315}$	$-\frac{2}{105}$

таблица 29

$$\bar{C}_{100lr}$$

$l \backslash r$	0	1
0	$\frac{8}{45}$	$-\frac{4}{35}$
1	$-\frac{16}{315}$	$\frac{2}{45}$

таблица 30

$$\bar{C}_{101lr}$$

$l \backslash r$	0	1
0	$\frac{4}{315}$	0
1	$\frac{4}{315}$	$-\frac{8}{945}$

таблица 31

$$\bar{C}_{111lr}$$

$l \backslash r$	0	1
0	$\frac{2}{105}$	$-\frac{8}{945}$
1	$\frac{2}{945}$	0

таблица 32

Литература

- [1] Гизман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. - К.: Наукова Думка, 1962. - 354с.
- [2] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. - М.: Фазис, 1998. т.1, 2.
- [3] Merton R.C. Continuous-Time Finance. - Basil: Blackwell, 1990.
- [4] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. - М.: Наука, 1976.
- [5] Nyquist H. Thermal agitation of Electric Charge in Conductors // Physical Rev. - 1928. - 32. - p.110.
- [6] Bolotin V.V. Statistical theory of the seismic design of structures // Proc. 2nd WEEE (Japan). - 1960. - P.1365.
- [7] Arato M. Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach. - Berlin: Springer-Verlag, 1982. - 289p.
- [8] Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. - Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1988. - 228с.
- [9] Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. - Berlin: Springer-Verlag, 1992. - 632p.
- [10] Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. - Berlin: Springer-Verlag, 1994. - 292p.
- [11] Мильштейн Г.Н. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и примен. - 1974, - 19. - С.557-562.
- [12] Wagner W., Platen E. Approximation of Ito integral equations // Preprint ZIMM, Akad. der. Wiss der DDR. - Berlin, 1978.
- [13] Platen E. A Taylor-Ito formula for semimartingales solving a stochastic differential equation // Springer Lecture Notes in Control and Inform. Sc. - 1981. - 36. - P.157-164.
- [14] Platen E., Wagner W. On a Taylor formula for a class of Ito processes // Prob. Math. Statist. - 1982. - 3. - P.37-51.
- [15] Platen E. An approximation method for a class of Ito processes with jump component // Lietuvos Matem. Rink. - 1982. - 22. - P.124-136.
- [16] Kloeden P.E., Platen E. The Stratonovich- and Ito-Taylor expansions // Math. Nachr. - 1991. - 151. - P.33-50.
- [17] Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W. The Approximation of multiple stochastic integrals // Stoch. Anal. And Applicat. - 1992. - 4. - P.431-441.
- [18] Кузнецов Д.Ф. Некоторые вопросы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. - С-Пб.: Изд-во С-Пб ГТУ, 1998. - 203с.
- [19] Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. - С-Пб.: Наука, 1999. - 459с.
- [20] Кузнецов Д.Ф. Применение методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито к численному моделированию управляемых стохастических систем // Проблемы управления и информатики. - 1999. - 4. - С.91-108.
- [21] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Унифицированное разложение Тейлора-Ито // Записки научных семинаров ПОМИ им. В.А.Стеклова. Вероятность и статистика 2. - 1997. - 244. - С.186-204.
- [22] Кузнецов Д.Ф. Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах. - С-Пб., 1997. - 31с. - (Деп. в ВИНТИ, 10.12.97, N3607-B97).
- [23] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Численные методы моделирования систем управления, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями // Проблемы управления и информатики. - 1998. - N2. - С.57-72.
- [24] Platen E. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations // Acta Numerica. - 1999. - 8. - P.195-244.
- [25] Скороход А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. - М.: Наука, 1964. - 280с.
- [26] Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. - М.: Наука, 1986. - 445с.
- [27] Королук В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Наука, 1985 - 640с.

Лицензия ЛР № 020593 от 7.08.97

Подписано в печать 04.10.99. Объем в п. л. 2,25.

Тираж 50. Заказ № 545.

Отпечатано с готового оригинал-макета

в типографии Издательства СПбГТУ

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29