ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 11. № 4 (2019). С. 50-78.

УДК 519.2

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОВТОРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ СТРАТОНОВИЧА, ОСНОВАННОЕ НА ОБОБЩЕННЫХ КРАТНЫХ РЯДАХ ФУРЬЕ

Д.Ф. КУЗНЕЦОВ

Аннотация. Посвящена разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича кратностей 1–4 на основе метода обобщенных кратных рядов Фурье. Доказана среднеквадратическая сходимость полученных разложений для случая полиномов Лежандра, а также для случая тригонометрических функций. Рассмотренные разложения содержат только одну операцию предельного перехода в отличие от существующих аналогов. Это свойство очень удобно для среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов. Хорошо известно, что перспективный подход к численному решению стохастических дифференциальных уравнений Ито, которые являются адекватными математическими моделями динамических систем различной физической природы под влиянием случайных возмущений, это подход, основанный на стохастических аналогах формулы Тейлора для решения этих уравнений. Рассмотренные в статье повторные стохастические интегралы Стратоновича являются частью так называемого разложения Тейлора–Стратоновича, которое является одной из версий упомянутых стохастических аналогов формулы Тейлора. Поэтому результаты статьи могут быть применены к построению сильных численных методов порядков сходимости 1.0, 1.5 и 2.0 для стохастических дифференциальных уравнений Ито. Рассмотренный в статье метод обобщенных кратных рядов Фурье не приводит к разбиению интервала интегрирования повторных стохастических интегралов Стратоновича. Эта особенность существенна из-за малости указанного интервала интегрирования, так как этот интервал играет роль шага интегрирования в численных методах для стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Ключевые слова: повторный стохастический интеграл Стратоновича, кратный ряд Фурье, полином Лежандра, разложение, среднеквадратическая сходимость.

Mathematics Subject Classification: 60H05

1. Введение

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega,\ \mathrm{F},\ \mathsf{P})$, неубывающая совокупность σ-алгебр $\{\mathrm{F}_t, t\in[0,T]\}$ на нем и F_t-измеримый при всех $t\in[0,T]$ m-мерный стандартный винеровский процесс $\mathbf{f}_t$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$, причем процесс $\mathbf{f}_{t+\Delta}-\mathbf{f}_t$ при всех $t\ge 0$, $\Delta>0$ не зависит от событий σ-алгебры F_t. Будем считать, что σ-алгебра F является полной относительно меры P, а σ-алгебра F_0 — содержит все события вероятности ноль.

D.F. Kuznetsov, Expansion of iterated Stratonovich stochastic integrals based on generalized multiple Fourier series.

Поступила 1 сентября 2018 г.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) Ито

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int\limits_0^t B(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega),\ \omega \in \Omega, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_\tau$, $\tau \in [0, T]$ — n-мерный случайный процесс, являющийся сильным решением СДУ Ито (1); второй интеграл в правой части (1) понимается как стохастический интеграл Ито; $\mathbf{a} : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $B : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n \times m}$ — неслучайные функции, для которых существует правая часть (1) и которые удовлетворяют стандартным условиям существования и единственности сильного решения $\mathbf{x}_\tau$, $\tau \in [0, T]$ СДУ Ито (1) [1]; $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ $(\tau > 0)$ считаются независимыми, причем $\mathbf{x}_0$ — n-мерная F_0-измеримая случайная величина, для которой $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$; M — оператор математического ожидания.

Известно [2]–[4], что одним из перспективных подходов к численному интегрированию СДУ Ито является подход, основанный на стохастических аналогах формулы Тейлора для решений данных уравнений. Этот подход использует конечную дискретизацию временной переменной и предполагает численное моделирование решения СДУ Ито в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов формулы Тейлора.

Важнейшей отличительной особенностью стохастических аналогов формулы Тейлора [2]–[11] для решений СДУ Ито является присутствие в них, так называемых, повторных стохастических интегралов (ПСИ) Ито или Стратоновича, которые являются функционалами сложной структуры относительно компонент векторного винеровского процесса.

В одной из наиболее общих форм записи в данной статье указанные ПСИ Ито и Стратоновича имеют соответственно следующий вид:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{2}$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{3}$$

где $\psi_l(\tau)$ $(l = 1, \ldots, k)$ — непрерывные на промежутке $[t, T]$ неслучайные функции; $\mathbf{w}_\tau$ — случайный вектор с $m + 1$ компонентой вида: $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; величины $i_1, \ldots, i_k$ принимают значения $0,\ 1, \ldots, m$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ — независимые стандартные винеровские процессы; k — кратность ПСИ. В (2) и (3), а также в дальнейшем для простоты записи вместо $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{i_1 \ldots i_k}$ и $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^{i_1 \ldots i_k}$ пишем $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ и $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ соответственно.

Отметим, что классические стохастические аналоги формулы Тейлора (так называемые разложения Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича) [2]–[6] содержат соответственно ПСИ Ито и Стратоновича вида (2) и (3) при $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_k(\tau) \equiv 1$ и $i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, m$.

Преобразованные аналоги упомянутых разложений (так называемые унифицированные разложения Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича) [7], [8] содержат соответственно ПСИ Ито и Стратоновича вида (2) и (3) при $\psi_l(\tau) \equiv (t - \tau)^{q_l}$, $\tau \in [t, T]$ и $i_l = 1, \ldots, m$; $q_l = 0, 1, 2 \ldots$; $l = 1, \ldots, k$.

Ввиду сказанного выше, системы ПСИ Ито и Стратоновича играют исключительно важную роль при решении проблемы численного интегрирования СДУ Ито.

На первый взгляд может показаться, что ПСИ можно аппроксимировать повторными интегральными суммами. Однако, такой подход подразумевает дробление промежутка интегрирования $[t, T]$ ПСИ (его длина $T - t$ и без того является достаточно малой величиной, поскольку играет роль шага интегрирования в численных методах для СДУ Ито), что ведет, как показывают численные эксперименты [9], к неприемлемо большим вычислительным затратам.

В [3] предложено использовать сходящиеся в среднеквадратическом смысле тригонометрические разложения Фурье для винеровских процессов, по которым строится ПСИ. В [3] данным методом получены разложения ПСИ Ито вида (2) при $k = 2$ и $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau) \equiv 1$; $i_1, i_2 = 0, 1, \ldots, m$.

Попытка развития этой идеи для ПСИ Стратоновича вида (3) при $k = 3$ и $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv 1$; $i_1, i_2, i_3 = 0, 1, \ldots, m$ была предпринята в [2], [10].

В [11] был предложен более общий метод среднеквадратической аппроксимации ПСИ Стратоновича вида (3), основанный на обобщенных повторных рядах Фурье, который позволяет использовать полные ортонормированные системы полиномов Лежандра и тригонометрических функций в пространстве $L_2([t, T])$ (метод [3], в силу своих особенностей, допускает применение только тригонометрических базисных функций).

Методы, использующие ряды Фурье и предложенные в [2]–[4], [10], [11], оказались существенно более эффективными для среднеквадратической аппроксимации ПСИ Стратоновича и Ито, нежели методы, основанные на интегральных суммах [9]. Однако, методы Фурье, рассмотренные в [2]–[4], [10], [11], приводят к повторным рядам из стандартных гауссовских случайных величин (операция предельного перехода выполняются итеративно), в противоположность кратным рядам (операция предельного перехода выполняется один раз). Это обстоятельство является существенным и накладывает ряд ограничений на применение методов [2]–[4], [10], [11] к ПСИ вида (2) и (3) кратности 3 и выше (здесь имеется ввиду не менее, чем трехкратное интегрирование по винеровским процессам в ПСИ).

В [9] предложен метод среднеквадратической аппроксимации ПСИ Ито вида (2) (далее теорема 1), основанный на кратных (не повторных) обобщенных рядах Фурье по различным полным ортонормированным системам базисных функций в пространстве $L_2([t, T]^k)$. В результате, в указанном методе операция предельного перехода выполняется только один раз, что ведет к корректному выбору длин последовательностей стандартных гауссовских случайных величин, необходимых для построения аппроксимаций ПСИ Ито. Кроме того, метод Фурье [9] дает новые возможности для оценки и точного вычисления среднеквадратических погрешностей аппроксимаций ПСИ Ито.

Настоящая статья посвящена адаптации метода Фурье [9] разложения ПСИ Ито вида (2) применительно к ПСИ Стратоновича вида (3). В работе (далее теоремы 2–4) показывается, что разложения ПСИ Стратоновича вида (3), полученные с помощью метода [9], оказываются существенно проще (без дополнительных и довольно сложных добавочных членов) своих аналогов, изначально полученных в [9] для ПСИ Ито вида (2).

2. Формулировка основных результатов

Приведем формулировку метода Фурье [9].

Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2([t, T])$, а $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_k(\tau)$ — непрерывные на промежутке $[t, T]$ неслучайные функции. Введем в рассмотрение следующую функцию

$$K(t_1, \ldots, t_k) = \psi_1(t_1) \ldots \psi_k(t_k) \mathbf{1}_{\{t_1 < \ldots < t_k\}};\ t_1, \ldots, t_k \in [t, T];\ k \geq 2 \tag{4}$$

и $K(t_1) = \psi_1(t_1);\ t_1 \in [t, T]$, где $\mathbf{1}_{\{A\}}$ — индикатор множества A.

Функция $K(t_1,\ldots,t_k)$ кусочно-непрерывна в гиперкубе $[t,T]^k$, поэтому кратный ряд Фурье функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2([t,T]^k)$ в гиперкубе $[t,T]^k$ сходится в смысле среднего квадратического, т.е.:

$$\lim_{p_1,\ldots,p_k\to\infty}\int\limits_{[t,T]^k}\left(K(t_1,\ldots,t_k)-\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)\right)^2 dt_1\ldots dt_k=0, \tag{5}$$

где

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_{[t,T]^k}K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k \tag{6}$$

и имеет место равенство Парсеваля:

$$\int\limits_{[t,T]^k}K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k=\lim_{p_1,\ldots,p_k\to\infty}\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}\left(C_{j_k\ldots j_1}\right)^2.$$

Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ промежутка $[t,T]$ такое, что

$$t=\tau_0<\ldots<\tau_N=T,\ \ \Delta_N=\max_{0\le j\le N-1}\Delta\tau_j\to 0 \ \text{при}\ N\to\infty,\ \ \Delta\tau_j=\tau_{j+1}-\tau_j. \tag{7}$$

Теорема 1. [9] *Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система непрерывных функций в пространстве $L_2([t,T])$, а $\psi_i(\tau);\ i=1,\ 2,\ldots,k$ — непрерывные на промежутке $[t,T]$ функции. Тогда ПСИ Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ вида* (2) *разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}=\underset{p_1,\ldots,p_k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in G_k}\phi_{j_1}(\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\phi_{j_k}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}\Biggr), \tag{8}$$

где l.i.m. *— предел в среднеквадратическом смысле,*

$$G_k=H_k\backslash L_k,\ \ H_k=\{(l_1,\ldots,l_k):\ \ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots,N-1\},$$

$$L_k=\{(l_1,\ldots,l_k):\ \ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots,N-1;\ l_g\ne l_r\ (g\ne r);\ g,r=1,\ldots,k\},$$

$$\zeta_j^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(i)}$$

— независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных i или j (если $i\ne 0$), $\Delta\mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}=\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)}-\mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$ $(i=0,\ 1,\ldots,m)$, $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ — разбиение промежутка $[t,T]$, удовлетворяющее условию (7).

Нетрудно показать, что частные случаи (8) при $k=1,\ldots,4$ запишутся в виде:

$$J[\psi^{(1)}]_{T,t}=\underset{p_1\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{9}$$

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t}=\underset{p_1,p_2\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2}C_{j_2j_1}\left(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\right), \tag{10}$$

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t}=\underset{p_1,\ldots,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_3=0}^{p_3}C_{j_3j_2j_1}\Biggl(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-$$

$$
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\Biggr), \qquad (11)
$$

$$
J[\psi^{(4)}]_{T,t}=\underset{p_1,\ldots,p_4\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_4=0}^{p_4}C_{j_4\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-
$$

$$
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-
$$

$$
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-
$$

$$
-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}+
$$

$$
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}+
$$

$$
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\Biggr). \qquad (12)
$$

Сформулируем основные результаты настоящей работы (теоремы 2–4), которые показывают, что аналоги разложений (10)–(12), полученные для ПСИ Стратоновича вида (3), оказываются существенно проще, нежели разложения (10)–(12).

Теорема 2. *Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве $L_2([t,T])$. Пусть, кроме того, функция $\psi_2(\tau)$ — непрерывно дифференцируема на отрезке $[t,T]$, а функция $\psi_1(\tau)$ — дважды непрерывно дифференцируема на этом отрезке. Тогда для ПСИ Стратоновича $J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}$ 2 кратности вида (3) при $i_1,i_2=1,\ldots,m$ справедливо следующее, сходящееся в среднеквадратическом смысле, разложение*

$$
J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\underset{p_1,p_2\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},
$$

где сохранен смысл обозначений теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве $L_2([t,T])$. Пусть, кроме того, функция $\psi_2(s)$ — непрерывно дифференцируема на отрезке $[t,T]$, а функции $\psi_1(s),\psi_3(s)$ — дважды непрерывно дифференцируемы на этом отрезке. Тогда для ПСИ Стратоновича $J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}$ 3 кратности вида (3) при $i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m$ справедливо следующее, сходящееся в среднеквадратическом смысле, разложение*

$$
J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}, \qquad (13)
$$

где сохранен смысл обозначений теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра или система тригонометрических функций в пространстве $L_2([t,T])$. Пусть, кроме того, $\psi_1(s),\ \ldots,\ \psi_4(s)\equiv 1$. Тогда для ПСИ Стратоновича $J^*[\psi^{(4)}]_{T,t}$ 4 кратности вида (3) при $i_1,\ldots,i_4=0,1,\ldots,m$ справедливо следующее, сходящееся в среднеквадратическом смысле, разложение*

$$
J^*[\psi^{(4)}]_{T,t}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}, \qquad (14)
$$

где сохранен смысл обозначений теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 2

В соответствии со стандартной связью стохастических интегралов Стратоновича и Ито [2] с вероятностью 1 (далее с в. 1):

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = J[\psi^{(2)}]_{T,t} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}} \int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1. \tag{15}$$

Согласно (10), (15) теорема 2 будет доказана, если мы покажем, что

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1j_1}. \tag{16}$$

Рассмотрим функцию

$$K^*(t_1,t_2) = K(t_1,t_2) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1), \tag{17}$$

где $t_1, t_2 \in [t,T]$, а $K(t_1,t_2)$ имеет вид (4) при $k=2$.

Разложим функцию $K^*(t_1,t_2)$ по переменной t_1 (t_2 фиксировано) в ряд Фурье на интервале (t,T) :

$$K^*(t_1,t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)\ (t_1\neq t,\ t_1\neq T), \tag{18}$$

где

$$C_{j_1}(t_2) = \int\limits_t^T K^*(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 = \psi_2(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1.$$

Равенство (18) выполняется в каждой точке интервала (t,T) по переменной t_1 (t_2 фиксировано) согласно кусочной гладкости функции $K^*(t_1,t_2)$ по переменной t_1 [12]–[14]. Отметим также, что согласно хорошо известным свойствам рядов Фурье [12]–[14], ряд (18) сходится при $t_1=t$, $t_1=T$. При получении (18) мы также использовали тот факт [12]–[14], что правая часть (18) сходится при $t_1=t_2$ (точка конечного разрыва функции $K^*(t_1,t_2)$) к величине

$$\frac{1}{2}\left(K^*(t_2-0,t_2)+K^*(t_2+0,t_2)\right) = \frac{1}{2}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2) = K^*(t_2,t_2).$$

Функция $C_{j_1}(t_2)$ является непрерывно дифференцируемой. Разложим ее в ряд Фурье на интервале (t,T):

$$C_{j_1}(t_2) = \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\phi_{j_2}(t_2)\ (t_2\neq t,\ t_2\neq T), \tag{19}$$

где $C_{j_2j_1}$ имеет вид (6) при $k=2$, а равенство (19) выполненяется в любой точке интервала (t,T) (правая часть (19) сходится при $t_2=t$, $t_2=T$) [12]–[14].

Подставим (19) в (18):

$$K^*(t_1,t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2),\ (t_1,t_2)\in(t,T)^2. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что, полагая $t_1=t_2$ в (20), мы получим:

$$\frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1). \tag{21}$$

С помощью (21) мы формально можем записать:

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1 = \int\limits_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1 =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\int\limits_t^T C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1 =$$

$$= \lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2j_1}\int\limits_t^T \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1 =$$

$$= \lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2j_1}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} = \lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{\min\{p_1,p_2\}} C_{j_2j_1} = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1j_1}. \qquad (22)$$

Далее, через $C, K, C_0, K_0, C_1, K_1, \ldots$ договоримся обозначать постоянные.

Поясним переход от первой ко второй строке в (22) (дальнейшие рассуждения в (22) следуют из ортонормированности функций $\phi_j(s)$ на промежутке $[t,T]$). Имеем:

$$\left|\int\limits_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 - \sum_{j_1=0}^{p_1}\int\limits_t^T C_{j_1}(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\right| \le$$

$$\le \int\limits_t^T \left|\psi_2(t_1)G^{p_1}(t_1)\right| dt_1 \le C\int\limits_t^T \left|G^{p_1}(t_1)\right| dt_1, \qquad (23)$$

где

$$G^p(\tau) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \sum_{j=p+1}^{\infty}\int\limits_t^{\tau}\psi_1(s)\phi_j(s)ds\phi_j(\tau).$$

Рассмотрим случай полиномов Лежандра. Тогда

$$\left|G^{p_1}(t_1)\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}(2j_1+1)\int\limits_{-1}^{z(t_1)}\psi_1(u(y))P_{j_1}(y)dyP_{j_1}(z(t_1))\right|, \qquad (24)$$

где

$$u(y) = \frac{T-t}{2}y + \frac{T+t}{2},\ z(s) = \left(s - \frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}, \qquad (25)$$

а $\{P_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([-1,1])$.

На протяжении настоящей статьи для рационального q полагаем

$$J_q(t,T) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \int\limits_t^T \frac{ds}{(1-z^2(s))^q},\ I_q(x) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \int\limits_{-1}^{x} \frac{dy}{(1-y^2)^q},\ f_q(x) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \frac{1}{(1-z^2(x))^q}.$$

Из (24) и формулы [12]

$$P'_{j+1}(x) - P'_{j-1}(x) = (2j+1)P_j(x);\ j = 1,\ 2,\ldots, \qquad (26)$$

где штрих означает производную по x, следует, что

$$\left|G^{p_1}(t_1)\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left\{\left(P_{j_1+1}(z(t_1)) - P_{j_1-1}(z(t_1))\right)\psi_1(t_1) - \frac{T-t}{2}\times\right.\right.$$

$$\times \int\limits_{-1}^{z(t_1)} \left(P_{j_1+1}(y) - P_{j_1-1}(y)\right) \psi_1'(u(y))dy \Biggr\} P_{j_1}(z(t_1)) \Biggr| \le$$

$$\le C_0 \Biggl| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \left(P_{j_1+1}(z(t_1))P_{j_1}(z(t_1)) - P_{j_1-1}(z(t_1))P_{j_1}(z(t_1))\right) \Biggr| +$$

$$+\frac{T-t}{4} \Biggl| \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \Biggl\{ \psi_1'(t_1) \left(\frac{1}{2j_1+3} \left(P_{j_1+2}(z(t_1)) - P_{j_1}(z(t_1))\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2j_1-1} \left(P_{j_1}(z(t_1)) - P_{j_1-2}(z(t_1))\right) \right) - \frac{T-t}{2} \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{z(t_1)} \left(\frac{1}{2j_1+3} \left(P_{j_1+2}(y) - P_{j_1}(y)\right) - \frac{1}{2j_1-1} \left(P_{j_1}(y) - P_{j_1-2}(y)\right) \right) \times$$

$$\times \psi_1''(u(y))dy \Biggr\} P_{j_1}(z(t_1)) \Biggr|, \tag{27}$$

где $\psi_1',\ \psi_1''$ — производные функции $\psi_1(s)$ по переменной $u(y)$.

Из (27) и оценки для полиномов Лежандра [12]

$$|P_n(y)| < \frac{K}{\sqrt{n+1}(1-y^2)^{1/4}},\ y \in (-1,1),\ n \in N \tag{28}$$

при $t_1 \in (t,T)$ получим:

$$|G^{p_1}(t_1)| < C_0 \Biggl| \lim_{n\to\infty} \sum_{j_1=p_1+1}^{n} \left(P_{j_1+1}(z(t_1))P_{j_1}(z(t_1)) - P_{j_1-1}(z(t_1))P_{j_1}(z(t_1))\right) \Biggr| +$$

$$+C_1 \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \left(f_{1/2}(t_1) + I_{1/4}(z(t_1))f_{1/4}(t_1)\right) <$$

$$< C_0 \left| \lim_{n\to\infty} \left(P_{n+1}(z(t_1))P_n(z(t_1)) - P_{p_1}(z(t_1))P_{p_1+1}(z(t_1))\right) \right| +$$

$$+C_1 \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \left(f_{1/2}(t_1) + C_2 f_{1/4}(t_1)\right) < C_3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p_1} \right) f_{1/2}(t_1) +$$

$$+C_1 \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \left(f_{1/2}(t_1) + C_2 f_{1/4}(t_1)\right) \le$$

$$\le C_4 \left(\left(\frac{1}{p_1} + \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \right) f_{1/2}(t_1) + \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} f_{1/4}(t_1) \right) \le$$

$$\le \frac{K}{p_1} \left(f_{1/2}(t_1) + f_{1/4}(t_1)\right), \tag{29}$$

где мы использовали неравенство:

$$\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \frac{1}{j_1^2} \le \int\limits_{p_1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{p_1}. \tag{30}$$

Из (23) и (29) следует, что

$$\left|\int\limits_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 - \sum_{j_1=0}^{p_1}\int\limits_t^T C_{j_1}(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\right| < \frac{K_1}{p_1}\left(I_{1/2}(1)+I_{1/4}(1)\right) \ \to 0$$

при $p_1\to\infty$.

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1 = \int\limits_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 =$$

$$=\sum_{j_1=0}^{\infty}\int\limits_t^T C_{j_1}(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty}\int\limits_t^T \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\phi_{j_2}(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 =$$

$$=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\int\limits_t^T C_{j_2j_1}\phi_{j_2}(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1j_1}. \tag{31}$$

В (31) мы использовали тот факт, что ряд Фурье-Лежандра

$$\sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\phi_{j_2}(t_1)$$

гладкой функции $C_{j_1}(t_1)$ сходится равномерно к этой функции на любом отрезке $[t+\varepsilon, T-\varepsilon]$ $\forall\ \varepsilon>0$, сходится к этой функции в каждой точке интервала (t,T) и сходится к $C_{j_1}(t+0)$ и $C_{j_1}(T-0)$ при $t_1=t$ и $t_1=T$ соответственно [12], [14]. Соотношение (16) доказано для случая полиномов Лежандра.

Пусть теперь $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система тригонометрических функций в пространстве $L_2([t,T])$. Имеем

$$\left|\int\limits_t^T \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 - \sum_{j_1=0}^{p_1}\int\limits_t^T C_{j_1}(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\right| =$$

$$=\left|\int\limits_t^T \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty} \psi_2(t_1)\phi_{j_1}(t_1)\int\limits_t^{t_1}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta dt_1\right| =$$

$$=\frac{2}{T-t}\left|\int\limits_t^T \psi_2(t_1)\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^{t_1}\psi_1(s)\sin\frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t}ds\ \sin\frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_t^{t_1}\psi_1(s)\cos\frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t}ds\ \cos\frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t}\right)dt_1\right| =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_t^T\left(\psi_1(t)\psi_2(t_1)\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\frac{1}{j_1}\sin\frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t}+\right.\right.$$

$$+\frac{T-t}{2\pi}\psi_2(t_1)\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\left(\psi_1'(t_1)-\psi_1'(t)\cos\frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t}-\right.$$

$$-\int\limits_t^{t_1} \sin\frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t}\psi_1''(s)ds\ \sin\frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t}-$$

$$-\int\limits_t^{t_1} \cos\frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t}\psi_1''(s)ds\ \cos\frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t}\Biggr)\Biggr)dt_1\Biggr| \le$$

$$\le C_1\Biggl|\int\limits_t^T \psi_2(t_1)\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\frac{1}{j_1}\sin\frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t}dt_1\Biggr| + \frac{C_2}{p_1} =$$

$$= C_1\Biggl|\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\frac{1}{j_1}\int\limits_t^T \psi_2(t_1)\sin\frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t}dt_1\Biggr| + \frac{C_2}{p_1}, \qquad (32)$$

где последний шаг следует из равномерной сходимости (по признаку Дирихле-Абеля) ряда [13]

$$\sum_{j_1=1}^{\infty}\frac{1}{j_1}\sin\frac{2\pi j_1(t_1-t)}{T-t}.$$

Из (32) получим

$$\Biggl|\int\limits_t^T \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\psi_2(t_1)\phi_{j_1}(t_1)\int\limits_t^{t_1}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta dt_1\Biggr| \le$$

$$\le C_3\Biggl|\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\Biggl(\psi_2(T)-\psi_2(t)-\int\limits_t^T\cos\frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t}\psi_2'(s)ds\Biggr)\Biggr| + \frac{C_2}{p_1} \le \frac{K}{p_1}. \qquad (33)$$

Дальнейшее рассмотрение данного случая аналогично доказательству соотношения (16) для случая полиномов Лежандра. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Сначала рассмотрим случай полиномов Лежандра. Из формулы (11) при $p_1 = p_2 = p_3 = p$ и стандартных соотношений между стохастическими интегралами Ито и Стратоновича [2] следует, что теорема 3 верна, если:

$$\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T\psi_3(s)\int\limits_t^s\psi_2(s_1)\psi_1(s_1)ds_1d\mathbf{f}_s^{(i_3)}, \qquad (34)$$

$$\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T\psi_3(s)\psi_2(s)\int\limits_t^s\psi_1(s_1)d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)}ds, \qquad (35)$$

$$\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_1j_3j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} = 0. \qquad (36)$$

Докажем (34). По теореме 1 при $k=1$ (см. также (9)):

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T\psi_3(s)\int\limits_t^s\psi_2(s_1)\psi_1(s_1)ds_1d\mathbf{f}_s^{(i_3)} = \frac{1}{2}\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_3=0}^{p}\tilde{C}_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

где

$$\tilde{C}_{j_3}=\int\limits_t^T\phi_{j_3}(s)\psi_3(s)\int\limits_t^s\psi_2(s_1)\psi_1(s_1)ds_1ds.$$

Далее имеем:

$$E_p\stackrel{\rm def}{=}{\sf M}\left\{\left(\sum_{j_1=0}^p\sum_{j_3=0}^p C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\frac{1}{2}\sum_{j_3=0}^p\tilde{C}_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right)^2\right\}=$$

$$={\sf M}\left\{\left(\sum_{j_3=0}^p\left(\sum_{j_1=0}^p C_{j_3j_1j_1}-\frac{1}{2}\tilde{C}_{j_3}\right)\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right)^2\right\}=\sum_{j_3=0}^p\left(\sum_{j_1=0}^p C_{j_3j_1j_1}-\frac{1}{2}\tilde{C}_{j_3}\right)^2=$$

$$=\sum_{j_3=0}^p\left(\sum_{j_1=0}^p\int\limits_t^T\psi_3(s)\phi_{j_3}(s)\int\limits_t^s\psi_2(s_1)\phi_{j_1}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds_1ds-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\psi_3(s)\phi_{j_3}(s)\int\limits_t^s\psi_1(s_1)\psi_2(s_1)ds_1ds\right)^2=$$

$$=\sum_{j_3=0}^p\left(\int\limits_t^T\psi_3(s)\phi_{j_3}(s)\int\limits_t^s\left(\sum_{j_1=0}^p\psi_2(s_1)\phi_{j_1}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)ds_2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\psi_1(s_1)\psi_2(s_1)\right)ds_1ds\right)^2. \qquad (37)$$

Положив $t_1=t_2=s_1$ в (18), получим, что для любого $s_1\in(t,T)$:

$$\sum_{j_1=0}^\infty\psi_2(s_1)\phi_{j_1}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)ds_2=\frac{1}{2}\psi_1(s_1)\psi_2(s_1). \qquad (38)$$

Из (37) и (38) следует, что

$$E_p=\sum_{j_3=0}^p\left(\int\limits_t^T\psi_3(s)\phi_{j_3}(s)\int\limits_t^s\sum_{j_1=p+1}^\infty\psi_2(s_1)\phi_{j_1}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds_1ds\right)^2. \qquad (39)$$

Из (39) и (29) получим

$$E_p<C_1\sum_{j_3=0}^p\left(\int\limits_t^T|\phi_{j_3}(s)|\frac{1}{p}\left(I_{1/2}(z(s))+I_{1/4}(z(s))\right)ds\right)^2<$$

$$<\frac{C_2}{p^2}\sum_{j_3=0}^p\left(\int\limits_t^T|\phi_{j_3}(s)|ds\right)^2\le\frac{C_2(T-t)}{p^2}\sum_{j_3=0}^p\int\limits_t^T\phi_{j_3}^2(s)ds=\frac{C_3p}{p^2}\to 0$$

при $p\to\infty$. Равенство (34) доказано.

Докажем (35). По формуле Ито:

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T\psi_3(s)\psi_2(s)\int\limits_t^s\psi_1(s_1)d{\bf f}_{s_1}^{(i_1)}ds=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\psi_1(s_1)\int\limits_{s_1}^T\psi_3(s)\psi_2(s)dsd{\bf f}_{s_1}^{(i_1)}\ \text{с. в. 1}.$$

По теореме 1 при $k=1$ (см. также (9)):

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_1(s)\int\limits_s^T \psi_3(s_1)\psi_2(s_1)ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_1)} = \frac{1}{2}\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}^{*}\zeta_{j_1}^{(i_1)},$$

где

$$C_{j_1}^{*} = \int\limits_t^T \psi_1(s)\phi_{j_1}(s)\int\limits_s^T \psi_3(s_1)\psi_2(s_1)ds_1 ds. \qquad (40)$$

Имеем:

$$E_p' \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{p} C_{j_3 j_3 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}^{*}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)^2\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_1=0}^{p}\left(\sum_{j_3=0}^{p} C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2}C_{j_1}^{*}\right)\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)^2\right\} = \sum_{j_1=0}^{p}\left(\sum_{j_3=0}^{p} C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2}C_{j_1}^{*}\right)^2, \qquad (41)$$

$$C_{j_3 j_3 j_1} = \int\limits_t^T \psi_3(s)\phi_{j_3}(s)\int\limits_t^s \psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1} \psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)ds_2 ds_1 ds =$$

$$= \int\limits_t^T \psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)\int\limits_{s_2}^T \psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_{s_1}^T \psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds ds_1 ds_2. \qquad (42)$$

Из (40)–(42) находим:

$$E_p' = \sum_{j_1=0}^{p}\left(\int\limits_t^T \psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)\int\limits_{s_2}^T\left(\sum_{j_3=0}^{p}\psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_{s_1}^T \psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{1}{2}\psi_3(s_1)\psi_2(s_1)\right)ds_1 ds_2\right)^2. \qquad (43)$$

Покажем, что для всех $s_1\in(t,T)$ выполнено равенство:

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_{s_1}^T \psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds = \frac{1}{2}\psi_2(s_1)\psi_3(s_1). \qquad (44)$$

Обозначим

$$K_1^{*}(t_1,t_2) = \psi_2(t_1)\psi_3(t_2)\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\psi_2(t_1)\psi_3(t_1);\ t_1,t_2\in[t,T].$$

Разложим функцию $K_1^{*}(t_1,t_2)$ по переменной t_2 (t_1 фиксировано) в ряд Фурье–Лежандра на интервале (t,T) :

$$K_1^{*}(t_1,t_2) = \sum_{j_3=0}^{\infty}\psi_2(t_1)\int\limits_{t_1}^T \psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds\ \phi_{j_3}(t_2)\ (t_2\neq t,\ t_2\neq T). \qquad (45)$$

Полагая $t_1=t_2=s_1$ в (45), получим (44) (см. также вывод формулы (38)).
Из (43) и (44) получим

$$E_p' = \sum_{j_1=0}^{p}\left(\int\limits_t^T \psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)\int\limits_{s_2}^T \sum_{j_3=p+1}^{\infty}\psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_{s_1}^T \psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds ds_1 ds_2\right)^2. \qquad (46)$$

Используя метод вывода оценки (29), получим для дважды непрерывно дифференцируемой функции $\psi_3(s)$ следующее неравенство:

$$\left|\sum_{j_3=p+1}^{\infty}\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds\right|<\frac{C}{p}\left(f_{1/2}(s_1)+f_{1/4}(s_1)\right), \tag{47}$$

где $s_1\in(t,T)$. Дальнейшее доказательство (35) аналогично выводу (34).

Докажем (36). Имеем

$$E_p''\stackrel{\mathsf{def}}{=}\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_1j_3j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)}\right)^2\right\}=\sum_{j_3=0}^{p}\left(\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1j_3j_1}\right)^2, \tag{48}$$

$$C_{j_1j_3j_1}=\int\limits_t^T\psi_3(s)\phi_{j_1}(s)\int\limits_t^s\psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds_1ds=$$

$$=\int\limits_t^T\psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)ds_2\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\phi_{j_1}(s)dsds_1. \tag{49}$$

Подставим (49) в (48):

$$E_p''=\sum_{j_3=0}^{p}\left(\int\limits_t^T\psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1)\sum_{j_1=0}^{p}\int\limits_t^{s_1}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\phi_{j_1}(s)dsds_1\right)^2. \tag{50}$$

Пусть $\tilde{K}(t_1,t_2)=\psi_1(t_1)\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}};\ t_1,t_2\in[t,T]$. Разложим функцию $\tilde{K}(t_1,t_2)$ по переменной t_1 (t_2 фиксировано) в ряд Фурье–Лежандра на интервале (t,T) :

$$\tilde{K}(t_1,t_2)=\sum_{j_1=0}^{\infty}\int\limits_t^{t_2}\psi_1(s)\phi_{j_1}(s)ds\ \phi_{j_1}(t_1)\ (t_1\neq t_2). \tag{51}$$

Используя (51), получим:

$$\sum_{j_1=0}^{p}\int\limits_t^{s_1}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\phi_{j_1}(s)ds=\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\left(\sum_{j_1=0}^{p}\phi_{j_1}(s)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta\right)ds$$

$$=\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\left(\sum_{j_1=0}^{\infty}\phi_{j_1}(s)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta-\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\phi_{j_1}(s)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta\right)ds=$$

$$=\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\psi_1(s)\mathbf{1}_{\{s<s_1\}}ds-\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\phi_{j_1}(s)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta ds=$$

$$=-\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\phi_{j_1}(s)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta ds. \tag{52}$$

Подставим (52) в (50):

$$E_p''=\sum_{j_3=0}^{p}\left(\int\limits_t^T\psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\phi_{j_1}(s)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta dsds_1\right)^2=$$

$$
=\sum_{j_3=0}^{p}\left(\lim_{N\to\infty}\ \sum_{l=0}^{N-1}\psi_2(u_l^*)\phi_{j_3}(u_l^*)\int\limits_{u_l^*}^{T}\psi_3(s)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\phi_{j_1}(s)\int\limits_{t}^{u_l^*}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta ds\Delta u_l\right)^2=
$$

$$
=\sum_{j_3=0}^{p}\left(\lim_{N\to\infty}\ \sum_{l=0}^{N-1}\psi_2(u_l^*)\phi_{j_3}(u_l^*)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\int\limits_{u_l^*}^{T}\psi_3(s)\phi_{j_1}(s)ds\int\limits_{t}^{u_l^*}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta\Delta u_l\right)^2, \qquad (53)
$$

где $t=u_0<u_1<\ldots<u_N=T$; $\Delta u_l=u_{l+1}-u_l$; u_l^* — точка минимума функции $(1-(z(s))^2)^{-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ на интервале $[u_l,u_{l+1}]$; $\max\limits_{0\le l\le N-1}\Delta u_l\ \to\ 0$ при $N\to\infty$; $l=0,1,\ldots,N-1$. Последний шаг в (53) сделан на основании равномерной сходимости ряда Фурье–Лежандра функции $\tilde K(s,u_l^*)$ на отрезке $[u_l^*+\varepsilon,T-\varepsilon]$ $\forall\ \varepsilon>0$ ($\tilde K(s,u_l^*)\equiv 0$ при $s\in[u_l^*,T]$) [12], [14].

Далее имеем

$$
\int\limits_t^x\psi_1(s)\phi_{j_1}(s)ds=\frac{\sqrt{(T-t)(2j_1+1)}}{2}\int\limits_{-1}^{z(x)}P_{j_1}(y)\psi(u(y))dy=
$$

$$
=\frac{\sqrt{T-t}}{2\sqrt{2j_1+1}}\Biggl(\left(P_{j_1+1}(z(x))-P_{j_1-1}(z(x))\right)\psi_1(x)-
$$

$$
-\frac{T-t}{2}\int\limits_{-1}^{z(x)}\left(\left(P_{j_1+1}(y)-P_{j_1-1}(y)\right)\psi_1{}'(u(y))dy\right), \qquad (54)
$$

где $x\in(t,T)$; $j_1\ge p+1$; $z(x)$ и $u(y)$ определяются равенствами (25); $\psi_1{}'$ — производная функции $\psi_1(s)$ по переменной $u(y)$.

Отметим, что в (54) мы использовали известное свойство полиномов Лежандра: $P_{j+1}(-1)=-P_j(-1)$; $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и (26).

Из (28) и (54) находим

$$
\left|\int\limits_t^x\psi_1(s)\phi_{j_1}(s)ds\right|<\frac{C}{j_1}\left(f_{1/4}(x)+C_1\right);\ x\in(t,T). \qquad (55)
$$

Аналогично (55) и учитывая, что $P_j(1)=1$; $j=0,\ 1,\ 2,\ldots$ получим для интеграла (подобного тому, что стоит в левой части (55), но с пределами интегрирования x и T) оценку вида (55).

Объединяя оценку (55) и ее аналог для интеграла с пределами интегрирования x и T, получим:

$$
\left|\int\limits_t^x\psi_1(s)\phi_{j_1}(s)ds\int\limits_x^T\psi_3(s)\phi_{j_1}(s)ds\right|<\frac{K}{j_1^2}\left(f_{1/2}(x)+K_1\right);\ x\in(t,T). \qquad (56)
$$

Оценим правую часть (53), используя (56):

$$
E_p''\le C\sum_{j_3=0}^{p}\left(\lim_{N\to\infty}\ \sum_{l=0}^{N-1}|\phi_{j_3}(u_l^*)|\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\left(f_{1/2}(u_l^*)+K_1\right)\Delta u_l\right)^2\le
$$

$$
\le\frac{C_1}{p^2}\sum_{j_3=0}^{p}\left(\lim_{N\to\infty}\ \sum_{l=0}^{N-1}\left(f_{3/4}(u_l^*)+K_1f_{1/4}(u_l^*)\right)\Delta u_l\right)^2\le
$$

$$\leq \frac{C_1}{p^2}\sum_{j_3=0}^{p}\left(\lim_{N\to\infty}\ \left(J_{3/4}(t,T)+K_1J_{1/4}(t,T)\right)\right)^2=$$

$$=\frac{C_1}{p^2}\sum_{j_3=0}^{p}\left(J_{3/4}(t,T)+K_1J_{1/4}(t,T)\right)^2=$$

$$=\frac{C_1(T-t)^2p}{4p^2}\left(I_{3/4}(1)+K_1I_{1/4}(1)\right)^2\leq\frac{C_2}{p}\to 0 \qquad (57)$$

при $p\to\infty$. Соотношение (36) доказано. Теорема 3 доказана для случая полиномов Лежандра.

Перейдем теперь к рассмотрению доказательства теоремы 3 для случая тригонометрических функций. Аналогично неравенству (33) получим:

$$\left|\int\limits_{s_2}^{T}\sum_{j_3=p+1}^{\infty}\psi_2(s_1)\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_{s_1}^{T}\psi_3(s)\phi_{j_3}(s)dsds_1\right|\leq\frac{K_1}{p}, \qquad (58)$$

где s_2 — фиксировано. Используя (33) и (39), имеем:

$$E_p\leq K\sum_{j_3=0}^{p}\left(\int\limits_t^T\left|\int\limits_t^s\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\psi_2(s_1)\phi_{j_1}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds_1\right|ds\right)^2=$$

$$=K\sum_{j_3=0}^{p}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{l=0}^{N-1}\left|\int\limits_t^{u_l^*}\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\psi_2(s_1)\phi_{j_1}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\psi_1(s_2)\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds_1\right|\Delta u_l\right)^2$$

$$\leq K\sum_{j_3=0}^{p}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{l=0}^{N-1}\frac{K_1}{p}\Delta u_l\right)^2\leq\frac{K_2}{p^2}\sum_{j_3=0}^{p}(T-t)^2\leq\frac{C}{p}\ \to 0 \qquad (59)$$

при $p\to\infty$; $t=u_0<u_1<\ldots<u_N=T$; $\Delta u_l=u_{l+1}-u_l$; $u_l^*\in[u_l,u_{l+1}]$; $\max\limits_{0\leq l\leq N-1}\Delta u_l\ \to\ 0$ при $N\to\infty$; $l=0,1,\ldots,N-1$.

Аналогично, используя (58) и (46), получим, что $E_p'\to 0$ при $p\to\infty$.

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае справедлива оценка:

$$\left|\int\limits_t^x\psi_1(s)\phi_{j_1}(s)ds\int\limits_x^T\psi_3(s)\phi_{j_1}(s)ds\right|<\frac{K}{j_1^2},\ j_1\neq 0. \qquad (60)$$

Используя (53) и (60), имеем:

$$E_p''\leq K_1\sum_{j_3=0}^{p}\left(\lim_{N\to\infty}\ \sum_{l=0}^{N-1}\ \sum_{j_1=p+1}^{\infty}\left|\int\limits_{u_l^*}^{T}\psi_3(s)\phi_{j_1}(s)ds\int\limits_t^{u_l^*}\psi_1(\theta)\phi_{j_1}(\theta)d\theta\right|\Delta u_l\right)^2\leq$$

$$\leq K_2\sum_{j_3=0}^{p}\left(\lim_{N\to\infty}\ \sum_{l=0}^{N-1}\ \sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\Delta u_l\right)^2\leq\frac{K_2}{p^2}\sum_{j_3=0}^{p}(T-t)^2\leq\frac{C}{p}\ \to 0$$

при $p\to\infty$; смысл других обозначений такой же, как в (59). Теорема 3 доказана для тригонометрического случая. Теорема 3 доказана.

5. Доказательство теоремы 4

Из (12) следует, что

$$
\begin{gathered}
\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} = J[\psi^{(4)}]_{T,t}+\\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}A_1^{(i_3i_4)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}A_2^{(i_2i_4)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}A_3^{(i_2i_3)}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}A_4^{(i_1i_4)}+\\
+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}A_5^{(i_1i_3)}+\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}A_6^{(i_1i_2)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}B_1-\\
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}B_2-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}B_3,
\end{gathered}
\tag{61}
$$

где $J[\psi^{(4)}]_{T,t}$ имеет вид (2) при $\psi_1(s),\ldots,\psi_4(s)\equiv 1$ и $i_1,\ldots,i_4=0,1,\ldots,m$;

$$
A_1^{(i_3i_4)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4,j_3,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)},
$$

$$
A_2^{(i_2i_4)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4,j_3,j_2=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_3}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)},
$$

$$
A_3^{(i_2i_3)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4,j_3,j_2=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_4}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)},
$$

$$
A_4^{(i_1i_4)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4,j_3,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)},
$$

$$
A_5^{(i_1i_3)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4,j_3,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_4j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)},
$$

$$
A_6^{(i_1i_2)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_3j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},
$$

$$
B_1=\lim_{p\to\infty}\sum_{j_1,j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_1j_1},\ B_2=\lim_{p\to\infty}\sum_{j_4,j_3=0}^{p} C_{j_3j_4j_3j_4},
$$

$$
B_3=\lim_{p\to\infty}\sum_{j_4,j_3=0}^{p} C_{j_4j_3j_3j_4}.
$$

Используя замену порядка интегрирования в интегралах Римана, теорему 1 при $k=2$ (см. (10)), соотношение (16), равенство Парсеваля и формулу Ито, получим

$$
\begin{gathered}
A_1^{(i_3i_4)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4,j_3,j_1=0}^{p} \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s \phi_{j_3}(s_1)\left(\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_1}(s_2)ds_2\right)^2 ds_1 ds\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}=\\
=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4,j_3=0}^{p} \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s \phi_{j_3}(s_1)\sum_{j_1=0}^{p}\left(\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_1}(s_2)ds_2\right)^2 ds_1 ds\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_4,j_3=0}^{p} \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s \phi_{j_3}(s_1)\left((s_1-t)-\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_1}(s_2)ds_2\right)^2\right)ds_1 ds\\
\times\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}=
\end{gathered}
$$

$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_3=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_3}(s_1)(s_1-t)ds_1ds\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-\Delta_1^{(i_3i_4)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^s(s_1-t)d\mathbf{w}_{s_1}^{(i_3)}d\mathbf{w}_s^{(i_4)}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}\int\limits_t^T\phi_{j_3}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_3}(s_1)(s_1-t)ds_1ds-\Delta_1^{(i_3i_4)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^s\int\limits_t^{s_1}ds_2d\mathbf{w}_{s_1}^{(i_3)}d\mathbf{w}_s^{(i_4)}+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\int\limits_t^T(s_1-t)ds_1-\Delta_1^{(i_3i_4)}\ \text{с в. 1,}\tag{62}$$

где

$$\Delta_1^{(i_3i_4)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_3,j_4=0}^{p}a_{j_4j_3}^p\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

$$a_{j_4j_3}^p=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_3}(s_1)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_1}(s_2)ds_2\right)^2ds_1ds.\tag{63}$$

Рассмотрим $A_2^{(i_2i_4)}$:

$$A_2^{(i_2i_4)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_3,j_2=0}^{p}\left(\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\left(\int\limits_t^s\phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_1)ds_1ds-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_1)\left(\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_3}(s_2)ds_2\right)^2ds_1ds-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_3)\left(\int\limits_{s_3}^s\phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2ds_3ds\right)\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}=$$

$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_2=0}^{p}\left(\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)(s-t)\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_1)ds_1ds-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_1)(s_1-t)ds_1ds-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_3)(s-t+t-s_3)ds_3ds\right)\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-$$

$$-\Delta_2^{(i_2i_4)}+\Delta_1^{(i_2i_4)}+\Delta_3^{(i_2i_4)}=-\Delta_2^{(i_2i_4)}+\Delta_1^{(i_2i_4)}+\Delta_3^{(i_2i_4)}\ \text{с в. 1,}\tag{64}$$

где

$$\Delta_2^{(i_2i_4)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_2=0}^{p}b_{j_4j_2}^p\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)},\ \ \Delta_3^{(i_2i_4)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_2=0}^{p}c_{j_4j_2}^p\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

$$b^p_{j_4j_2}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\sum_{j_3=p+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s\phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_1)ds_1ds,$$

$$c^p_{j_4j_2}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_3)\sum_{j_3=p+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_3}^s\phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2ds_3ds.$$

Рассмотрим $A_5^{(i_1i_3)}$:

$$A_5^{(i_1i_3)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_3,j_1=0}^{p}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_4}(s_2)\int\limits_{s_2}^T\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_4}(s)dsds_1ds_2ds_3\times$$
$$\times\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=$$
$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_3,j_1=0}^{p}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_{s_3}^s\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_{s_3}^{s_1}\phi_{j_4}(s_2)ds_2ds_1dsds_3\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=$$
$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_3,j_1=0}^{p}\Biggl(\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\left(\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_4}(s)ds\right)^2\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_3}(s)dsds_3-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_3}(s)\left(\int\limits_{s_3}^s\phi_{j_4}(s_1)ds_1\right)^2dsds_3-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_3}(s_2)\left(\int\limits_{s_2}^T\phi_{j_4}(s_1)ds_1\right)^2ds_2ds_3\Biggr)\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=$$
$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_3,j_1=0}^{p}\Biggl(\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)(T-s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_3}(s)dsds_3-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_3}(s)(s-s_3)dsds_3-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_3}(s_2)(T-s_2)ds_2ds_3\Biggr)\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$
$$-\Delta_4^{(i_1i_3)}+\Delta_5^{(i_1i_3)}+\Delta_6^{(i_1i_3)}=-\Delta_4^{(i_1i_3)}+\Delta_5^{(i_1i_3)}+\Delta_6^{(i_1i_3)}\ \text{с в. 1},\tag{65}$$

где

$$\Delta_4^{(i_1i_3)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_3,j_1=0}^{p}d^p_{j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)},\ \ \Delta_5^{(i_1i_3)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_3,j_1=0}^{p}e^p_{j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$d^p_{j_3j_1}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\sum_{j_4=p+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_4}(s)ds\right)^2\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_3}(s)dsds_3,$$

$$e^p_{j_3j_1}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_3}(s)\sum_{j_4=p+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_3}^s\phi_{j_4}(s_1)ds_1\right)^2dsds_3,$$

$$\Delta_6^{(i_1i_3)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_3,j_1=0}^{p}f^p_{j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$f^p_{j_3j_1} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T \phi_{j_3}(s_2)\sum_{j_4=p+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_4}(s_1)ds_1\right)^2 ds_2ds_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_2)\sum_{j_4=p+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_4}(s_1)ds_1\right)^2 \int\limits_t^{s_2}\phi_{j_1}(s_3)ds_3ds_2.$$

Кроме того,

$$A_3^{(i_2i_3)} + A_5^{(i_2i_3)} = \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_3,j_2=0}^{p}\left(C_{j_4j_3j_2j_4} + C_{j_4j_3j_4j_2}\right)\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_3,j_2=0}^{p}\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s \phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_2}(s_2)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_4}(s_3)ds_3ds_2ds_1ds\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_3,j_2=0}^{p}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_2}(s_2)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_4}(s_3)ds_3ds_2\int\limits_{s_1}^T \phi_{j_4}(s)dsds_1\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_3,j_2=0}^{p}\Biggl(\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_2}(s_2)\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s_3)ds_3\int\limits_{s_1}^T \phi_{j_4}(s)dsds_2ds_1 -$$

$$-\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_2}(s_2)\left(\int\limits_{s_1}^T \phi_{j_4}(s)ds\right)^2 ds_2ds_1\Biggr)\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_3,j_2=0}^{p}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_2}(s_2)\left((T-s_1) - \sum_{j_4=0}^{p}\left(\int\limits_{s_1}^T \phi_{j_4}(s_3)ds_3\right)^2\right)ds_2ds_1\times$$

$$\times\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = 2\Delta_6^{(i_2i_3)} \text{ с в. 1.}$$

Поэтому

$$A_3^{(i_2i_3)} = 2\Delta_6^{(i_2i_3)} - A_5^{(i_2i_3)} = \Delta_4^{(i_2i_3)} - \Delta_5^{(i_2i_3)} + \Delta_6^{(i_2i_3)} \text{ с в. 1.} \tag{66}$$

Рассмотрим $A_4^{(i_1i_4)}$:

$$A_4^{(i_1i_4)} = \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_3,j_1=0}^{p}\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^s \phi_{j_3}(s_2)\int\limits_{s_2}^s \phi_{j_3}(s_1)ds_1ds_2ds_3ds\times$$

$$\times\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_1=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_3)\sum_{j_3=0}^{p}\left(\int\limits_{s_3}^s \phi_{j_3}(s_2)ds_2\right)^2 ds_3ds\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} =$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_4,j_1=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_3)(s-s_3)ds_3ds\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \Delta_3^{(i_1i_4)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^s (s-s_3)d\mathbf{w}_{s_3}^{(i_1)}d\mathbf{w}_s^{(i_4)} +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\lim_{p\to\infty}\sum_{j_4=0}^{p}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_4}(s_3)(s-s_3)ds_3ds-\Delta_3^{(i_1i_4)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{s_2}\int\limits_t^{s_1}d\mathbf{w}_s^{(i_1)}ds_1d\mathbf{w}_{s_2}^{(i_4)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\Biggl(\sum_{j_4=0}^{\infty}\int\limits_t^T(s-t)\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_4}(s_3)ds_3ds-$$

$$-\sum_{j_4=0}^{\infty}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s(s_3-t)\phi_{j_4}(s_3)ds_3ds\Biggr)-\Delta_3^{(i_1i_4)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{s_2}\int\limits_t^{s_1}d\mathbf{w}_s^{(i_1)}ds_1d\mathbf{w}_{s_2}^{(i_4)}-\Delta_3^{(i_1i_4)}\ \text{с в. 1.} \qquad (67)$$

Рассмотрим $A_6^{(i_1i_2)}$:

$$A_6^{(i_1i_2)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_2}(s_2)\int\limits_{s_2}^T\phi_{j_3}(s_1)\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_3}(s)dsds_1ds_2ds_3\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}$$

$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1,j_2=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_2}(s_2)\sum_{j_3=0}^{p}\Biggl(\int\limits_{s_2}^T\phi_{j_3}(s)ds\Biggr)^2ds_2ds_3\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}$$

$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1,j_2=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_2}(s_2)(T-s_2)ds_2ds_3\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}-\Delta_6^{(i_1i_2)}$$

$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1,j_2=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_2}(s_2)(T-s_2)\int\limits_t^{s_2}\phi_{j_1}(s_3)ds_3ds_2\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}-\Delta_6^{(i_1i_2)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_t^T(T-s_2)\int\limits_t^{s_2}d\mathbf{w}_{s_3}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{s_2}^{(i_2)}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\sum_{j_2=0}^{\infty}\int\limits_t^T\phi_{j_2}(s_2)(T-s_2)\int\limits_t^{s_2}\phi_{j_2}(s_3)ds_3ds_2-\Delta_6^{(i_1i_2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{s_1}\int\limits_t^{s_2}d\mathbf{w}_s^{(i_1)}d\mathbf{w}_{s_2}^{(i_2)}ds_1+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\int\limits_t^T(T-s_2)ds_2-\Delta_6^{(i_1i_2)}\ \text{с в. 1.} \qquad (68)$$

Перейдем к рассмотрению B_1,B_2,B_3 :

$$B_1=\lim_{p\to\infty}\sum_{j_1,j_4=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_4}(s_1)\Biggl(\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_1}(s_2)ds_2\Biggr)^2ds_1ds=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\sum_{j_4=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_4}(s_1)(s_1-t)ds_1ds-\lim_{p\to\infty}\sum_{j_4=0}^{p}a_{j_4j_4}^p=$$

$$
= \frac{1}{4}\int\limits_t^T (s_1-t)ds_1 - \lim_{p\to\infty}\sum_{j_4=0}^{p} a^p_{j_4j_4}. \qquad (69)
$$

Далее

$$
B_2 = \lim_{p\to\infty}\sum_{j_4,j_3=0}^{p}\Biggl(\frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_3)\Biggl(\int\limits_t^{s_3}\phi_{j_4}(s)ds\Biggr)^2\int\limits_t^{s_3}\phi_{j_3}(s_1)ds_1ds_3 -
$$

$$
-\frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_3}(s_2)\Biggl(\int\limits_t^{s_2}\phi_{j_4}(s_3)ds_3\Biggr)^2 ds_2ds_1 -
$$

$$
-\frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_3}(s)\Biggl(\int\limits_s^{s_1}\phi_{j_4}(s_2)ds_2\Biggr)^2 dsds_1\Biggr) =
$$

$$
= \sum_{j_3=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_3)(s_3-t)\int\limits_t^{s_3}\phi_{j_3}(s_1)ds_1ds_3 - \lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} b^p_{j_3j_3} -
$$

$$
-\sum_{j_3=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}(s_2-t)\phi_{j_3}(s_2)ds_2ds_1 + \lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} a^p_{j_3j_3} -
$$

$$
-\sum_{j_3=0}^{p}\frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_3}(s)(s_1-t+t-s)dsds_1 + \lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} c^p_{j_3j_3} =
$$

$$
= \lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} a^p_{j_3j_3} + \lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} c^p_{j_3j_3} - \lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} b^p_{j_3j_3}. \qquad (70)
$$

Кроме того,

$$
B_2 + B_3 = \lim_{p\to\infty}\sum_{j_4,j_3=0}^{p}\left(C_{j_3j_4j_3j_4} + C_{j_3j_4j_4j_3}\right) =
$$

$$
= \lim_{p\to\infty}\sum_{j_4,j_3=0}^{p}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)\int\limits_t^{s}\phi_{j_4}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_4}(s_2)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_3}(s_3)ds_3ds_2ds_1ds =
$$

$$
= \lim_{p\to\infty}\sum_{j_4,j_3=0}^{p}\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_4}(s_2)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_3}(s_3)ds_3ds_2\int\limits_{s_1}^{T}\phi_{j_3}(s)dsds_1 =
$$

$$
= \lim_{p\to\infty}\sum_{j_4,j_3=0}^{p}\Biggl(\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_4}(s_3)\int\limits_t^{T}\phi_{j_3}(s_2)ds_2\int\limits_{s_1}^{T}\phi_{j_3}(s)dsds_3ds_1 -
$$

$$
-\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_4}(s_3)\Biggl(\int\limits_{s_1}^{T}\phi_{j_3}(s)ds\Biggr)^2 ds_3ds_1\Biggr) =
$$

$$
= \sum_{j_4=0}^{\infty}\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s_1)(T-s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_4}(s_3)ds_3ds_1 -
$$

$$-\sum_{j_4=0}^{\infty}\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s_1)(T-s_1)\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_4}(s_3)ds_3ds_1+2\lim_{p\to\infty}\sum_{j_4=0}^{p}f^p_{j_4j_4}=2\lim_{p\to\infty}\sum_{j_4=0}^{p}f^p_{j_4j_4}.$$

Поэтому

$$B_3=2\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}f^p_{j_3j_3}-\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}a^p_{j_3j_3}-\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}c^p_{j_3j_3}+\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}b^p_{j_3j_3}. \qquad (71)$$

После подстановки соотношений (62)–(71) в (61) получим

$$\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(i_3)}_{j_3}\zeta^{(i_4)}_{j_4}=$$

$$=J[\psi^{(4)}]_{T,t}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^s\int\limits_t^{s_1}ds_2d\mathbf{w}^{(i_3)}_{s_1}d\mathbf{w}^{(i_4)}_s+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{s_2}\int\limits_t^{s_1}d\mathbf{w}^{(i_1)}_s ds_1 d\mathbf{w}^{(i_4)}_{s_2}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{s_1}\int\limits_t^{s_2}d\mathbf{w}^{(i_1)}_s d\mathbf{w}^{(i_2)}_{s_2}ds_1+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{s_1}ds_2ds_1+R=J^*[\psi^{(4)}]_{T,t}+R \text{ с в. } 1, \qquad (72)$$

где

$$R=-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\Delta^{(i_3i_4)}_1+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\left(-\Delta^{(i_2i_4)}_2+\Delta^{(i_2i_4)}_1+\Delta^{(i_2i_4)}_3\right)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\left(\Delta^{(i_2i_3)}_4-\Delta^{(i_2i_3)}_5+\Delta^{(i_2i_3)}_6\right)-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\Delta^{(i_1i_4)}_3+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\left(-\Delta^{(i_1i_3)}_4+\Delta^{(i_1i_3)}_5+\Delta^{(i_1i_3)}_6\right)-\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\Delta^{(i_1i_2)}_6+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}a^p_{j_3j_3}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\left(\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}a^p_{j_3j_3}+\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}c^p_{j_3j_3}-\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}b^p_{j_3j_3}\right)-$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\times$$

$$\times\left(2\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}f^p_{j_3j_3}-\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}a^p_{j_3j_3}-\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}c^p_{j_3j_3}+\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}b^p_{j_3j_3}\right). \qquad (73)$$

Из (72) и (73) следует, что теорема 4 будет доказана, если

$$\Delta^{(ij)}_k=0 \text{ с в. } 1 \text{ и } \sum_{j_3=0}^{p}a^p_{j_3j_3}\to 0,\ \sum_{j_3=0}^{p}b^p_{j_3j_3}\to 0,\ \sum_{j_3=0}^{p}c^p_{j_3j_3}\to 0,\ \sum_{j_3=0}^{p}f^p_{j_3j_3}\to 0 \qquad (74)$$

при $p\to\infty$, где $k=1,\ 2,\ldots,6;\ i,j=0,\ 1,\ldots,m.$

Рассмотрим случай полиномов Лежандра. Докажем, что $\Delta^{(i_3i_4)}_1=0$ с в. 1. Имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_3,j_4=0}^{p}a^p_{j_4j_3}\zeta^{(i_3)}_{j_3}\zeta^{(i_4)}_{j_4}\right)^2\right\}=\sum_{j_3'=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_3'-1}\left(2a^p_{j_3j_3}a^p_{j_3'j_3'}+\right.$$

$$
+\left(a^p_{j_3j_3'}\right)^2+2a^p_{j_3j_3'}a^p_{j_3'j_3}+\left(a^p_{j_3'j_3}\right)^2\Biggr)+3\sum_{j_3'=0}^{p}\left(a^p_{j_3'j_3'}\right)^2=
$$

$$
=\left(\sum_{j_3=0}^{p}a^p_{j_3j_3}\right)^2+\sum_{j_3'=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_3'-1}\left(a^p_{j_3j_3'}+a^p_{j_3'j_3}\right)^2+2\sum_{j_3'=0}^{p}\left(a^p_{j_3'j_3'}\right)^2\ \ (i_3=i_4\neq 0), \tag{75}
$$

$$
\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_3,j_4=0}^{p}a^p_{j_4j_3}\zeta^{(i_3)}_{j_3}\zeta^{(i_4)}_{j_4}\right)^2\right\}=\sum_{j_3,j_4=0}^{p}\left(a^p_{j_4j_3}\right)^2\ \ (i_3\neq i_4,\ i_3\neq 0,\ i_4\neq 0), \tag{76}
$$

$$
\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_3,j_4=0}^{p}a^p_{j_4j_3}\zeta^{(i_3)}_{j_3}\zeta^{(i_4)}_{j_4}\right)^2\right\}=\begin{cases}(T-t)\sum\limits_{j_4=0}^{p}\left(a^p_{j_4,0}\right)^2\ \text{при}\ i_3=0, i_4\neq 0\\ (T-t)\sum\limits_{j_3=0}^{p}\left(a^p_{0,j_3}\right)^2\ \ \text{при}\ i_4=0, i_3\neq 0\\ (T-t)^2\left(a^p_{00}\right)^2\ \ \text{при}\ i_3=i_4=0\end{cases}. \tag{77}
$$

Рассмотрим случай $i_3=i_4\neq 0$:

$$
a^p_{j_4j_3}=\frac{(T-t)^2\sqrt{(2j_4+1)(2j_3+1)}}{32}\times
$$

$$
\times\int\limits_{-1}^{1}P_{j_4}(y)\int\limits_{-1}^{y}P_{j_3}(y_1)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}(2j_1+1)\left(\int\limits_{-1}^{y_1}P_{j_1}(y_2)dy_2\right)^2dy_1dy=
$$

$$
=\frac{(T-t)^2\sqrt{(2j_4+1)(2j_3+1)}}{32}\times
$$

$$
\times\int\limits_{-1}^{1}P_{j_3}(y_1)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{2j_1+1}\left(P_{j_1+1}(y_1)-P_{j_1-1}(y_1)\right)^2\int\limits_{y_1}^{1}P_{j_4}(y)dydy_1=
$$

$$
=\frac{(T-t)^2\sqrt{2j_3+1}}{32\sqrt{2j_4+1}}\int\limits_{-1}^{1}P_{j_3}(y_1)\left(P_{j_4-1}(y_1)-P_{j_4+1}(y_1)\right)\times
$$

$$
\times\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{2j_1+1}\left(P_{j_1+1}(y_1)-P_{j_1-1}(y_1)\right)^2dy_1\ \ (j_4\neq 0),
$$

$$
a^p_{j_4j_3}=\frac{(T-t)^2\sqrt{2j_3+1}}{32}\times
$$

$$
\times\int\limits_{-1}^{1}P_{j_3}(y_1)(1-y_1)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{2j_1+1}\left(P_{j_1+1}(y_1)-P_{j_1-1}(y_1)\right)^2dy_1\ \ (j_4=0).
$$

Из (28) и оценки $|P_{j_4-1}(y)-P_{j_4+1}(y)|\le 2,\ y\in[-1,1]$ получим

$$
|a^p_{j_4j_3}|\le\frac{C_0}{\sqrt{j_4}}\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\ I_{3/4}(1)\le\frac{C_1}{p\sqrt{j_4}}\ \ (j_4\neq 0), \tag{78}
$$

$$
|a^p_{0,j_3}|\le C\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\ I_{3/4}(1)\le\frac{C_1}{p},\ \ |a^p_{00}|\le C\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\ I_{1/2}(1)\le\frac{C_1}{p}. \tag{79}
$$

Принимая во внимание (75)–(79), запишем:

$$
\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_3,j_4=0}^{p}a^p_{j_4j_3}\zeta^{(i_3)}_{j_3}\zeta^{(i_4)}_{j_4}\right)^2\right\}=\left(a^p_{00}+\sum_{j_3=1}^{p}a^p_{j_3j_3}\right)^2+\sum_{j_3'=1}^{p}\left(a^p_{0,j_3'}+a^p_{j_3',0}\right)^2+
$$

$$+\sum_{j_3'=1}^{p}\sum_{j_3=1}^{j_3'-1}\left(a^p_{j_3j_3'}+a^p_{j_3'j_3}\right)^2+2\Biggl(\sum_{j_3'=1}^{p}\left(a^p_{j_3'j_3'}\right)^2+(a_{00})^2\Biggr)\le K_0\Biggl(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\sum_{j_3=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{j_3}}\Biggr)^2$$

$$+\frac{K_1}{p}+K_2\sum_{j_3'=1}^{p}\sum_{j_3=1}^{j_3'-1}\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{j_3'}}+\frac{1}{\sqrt{j_3}}\right)^2\le K_0\Biggl(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\int\limits_0^p\frac{dx}{\sqrt{x}}\Biggr)^2+\frac{K_1}{p}+\frac{K_3}{p}\sum_{j_3=1}^{p}\frac{1}{j_3}\le$$

$$\le K_0\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{\sqrt{p}}\right)^2+\frac{K_1}{p}+\frac{K_3}{p}\Biggl(1+\int\limits_1^p\frac{dx}{x}\Biggr)\le\frac{K_4}{p}+\frac{K_3\left(\ln p+1\right)}{p}\ \to 0$$

при $p\to\infty$ $(i_3=i_4\ne 0)$.

Аналогичный результат для случаев (76), (77) также следует из оценок (78), (79). Поэтому

$$\Delta_1^{(i_3i_4)}=0 \text{ с. в. } 1. \tag{80}$$

Нетрудно видеть, что формулы

$$\Delta_2^{(i_2i_4)}=0,\ \Delta_4^{(i_1i_3)}=0,\ \Delta_6^{(i_1i_3)}=0 \text{ с. в. } 1 \tag{81}$$

могут быть получены аналогично доказательству соотношения (80).

Более того, из оценок (78), (79) получим

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}a^p_{j_3j_3}=0. \tag{82}$$

Аналогично выводу (82), найдем

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}b^p_{j_3j_3}=0\quad \lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p}f^p_{j_3j_3}=0. \tag{83}$$

Рассмотрим $\Delta_3^{(i_2i_4)}$:

$$\Delta_3^{(i_2i_4)}=\Delta_4^{(i_2i_4)}+\Delta_6^{(i_2i_4)}-\Delta_7^{(i_2i_4)}=-\Delta_7^{(i_2i_4)} \text{ с. в. } 1, \tag{84}$$

где

$$\Delta_7^{(i_2i_4)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_2,j_4=0}^{p}g^p_{j_4j_2}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)},$$

$$g^p_{j_4j_2}=\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_1)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\Biggl(\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_1}(s_2)ds_2\int\limits_s^T\phi_{j_1}(s_2)ds_2\Biggr)ds_1ds=$$

$$=\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_s^T\phi_{j_1}(s_2)ds_2\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_1)\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds_1ds. \tag{85}$$

Равенство (85) следует из оценки:

$$\left|g^p_{j_4j_2}\right|\le K\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{I_{1/2}(y)}{(1-y^2)^{1/2}}dy\ \le\frac{K_1}{p}.$$

Заметим, что

$$g^p_{j_4j_4}=\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{2}\Biggl(\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_s^T\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds\Biggr)^2, \tag{86}$$

$$g^p_{j_4j_2}+g^p_{j_2j_4}=\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_s^T\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds\int\limits_t^T\phi_{j_2}(s)\int\limits_s^T\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds \qquad (87)$$

и, кроме того, при $j_4,j_2\le p$

$$g^p_{j_4j_2}=\frac{(T-t)^2\sqrt{(2j_4+1)(2j_2+1)}}{16}\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{2j_1+1}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}P_{j_4}(y_1)\left(P_{j_1-1}(y_1)-P_{j_1+1}(y_1)\right)\int\limits_{-1}^{y_1}P_{j_2}(y)\left(P_{j_1-1}(y)-P_{j_1+1}(y)\right)dydy_1.$$

В силу ортонормированности полиномов Лежандра получим

$$g^p_{j_4j_2}+g^p_{j_2j_4}=\frac{(T-t)^2\sqrt{(2j_4+1)(2j_2+1)}}{16}\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{2j_1+1}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}P_{j_4}(y_1)\left(P_{j_1-1}(y_1)-P_{j_1+1}(y_1)\right)dy_1\int\limits_{-1}^{1}P_{j_2}(y)\left(P_{j_1-1}(y)-P_{j_1+1}(y)\right)dy=$$

$$=\frac{(T-t)^2(2p+1)}{16}\frac{1}{2p+3}\left(\int\limits_{-1}^{1}P_p^2(y_1)dy_1\right)^2\cdot\begin{cases}1 & j_2=j_4=p\\ 0 \text{ иначе}\end{cases}=$$

$$=\frac{(T-t)^2}{4(2p+3)(2p+1)}\cdot\begin{cases}1 \text{ при } j_2=j_4=p\\ 0 \text{ иначе}\end{cases}, \qquad (88)$$

$$g^p_{j_4j_4}=\frac{1}{2}\left(g^p_{j_4j_2}+g^p_{j_2j_4}\right)\Bigg|_{j_2=j_4}=\frac{(T-t)^2}{8(2p+3)(2p+1)}\cdot\begin{cases}1 \text{ при } j_4=p\\ 0 \text{ иначе}\end{cases}. \qquad (89)$$

Из (75), (88) и (89) получим:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_2,j_4=0}^{p}g^p_{j_4j_2}\zeta^{(i_2)}_{j_2}\zeta^{(i_4)}_{j_4}\right)^2\right\}=\left(\sum_{j_3=0}^{p}g^p_{j_3j_3}\right)^2+\sum_{j_3'=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_3'-1}\left(g^p_{j_3j_3'}+g^p_{j_3'j_3}\right)^2+$$

$$+2\sum_{j_3'=0}^{p}\left(g^p_{j_3'j_3'}\right)^2\le\left(\frac{(T-t)^2}{8(2p+3)(2p+1)}\right)^2+0\ +2\left(\frac{(T-t)^2}{8(2p+3)(2p+1)}\right)^2\ \to 0$$

при $p\to\infty$ $(i_2=i_4\ne 0)$.

Рассмотрим теперь случай $i_2\ne i_4,\ i_2\ne 0,\ i_4\ne 0$. Нетрудно видеть, что

$$g^p_{j_4j_2}=\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_t^s\phi_{j_2}(s_1)F^p(s,s_1)ds_1ds=\int\limits_{[t,T]^2}K_p(s,s_1)\phi_{j_4}(s)\phi_{j_2}(s_1)ds_1ds$$

является коэффициентом Фурье двойного ряда Фурье–Лежандра функции

$$K_p(s,s_1)=\mathbf{1}_{\{s_1<s\}}F^p(s,s_1), \qquad (90)$$

где

$$F^{p,n}(s,s_1)\stackrel{\mathsf{def}}{=}\sum_{j_1=p+1}^{n}\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_1}(s_2)ds_2\int\limits_s^T\phi_{j_1}(s_2)ds_2,\ \ F^{p,\infty}(s,s_1)\stackrel{\mathsf{def}}{=}F^p(s,s_1)$$

Равенство Парсеваля в данном случае имеет вид:

$$\lim_{p_1\to\infty}\sum_{j_4,j_2=0}^{p_1}\left(g^p_{j_4j_2}\right)^2=\int\limits_{[t,T]^2}\left(K_p(s,s_1)\right)^2ds_1ds=\int\limits_t^T\int\limits_t^s\left(F^p(s,s_1)\right)^2ds_1ds. \tag{91}$$

Из (28) получим:

$$\left|\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_1}(\theta)d\theta\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2j_1+1}\sqrt{T-t}\left|\int\limits_{z(s_1)}^1P_{j_1}(y)dy\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{T-t}}{2\sqrt{2j_1+1}}\left|P_{j_1-1}(z(s_1))-P_{j_1+1}(z(s_1))\right|\le\frac{K}{j_1}f_{1/4}(s_1),\ \ s_1\in(t,T). \tag{92}$$

Используя (30) и (92), имеем

$$\left(F^p(s,s_1)\right)^2\le\frac{C}{p^2}f_{1/2}(s)f_{1/2}(s_1);\ \ s,\ \ s_1\in(t,T). \tag{93}$$

Из (93) следует, что $|F^p(s,s_1)|\le K/p$ в области $D_\varepsilon=\{(s,s_1):\ s\in[t+\varepsilon,T-\varepsilon],$ $s_1\in[t+\varepsilon,s]\}$, где $\varepsilon>0$ — достаточно малое фиксированное число. Тогда имеем равномерную сходимость

$$F^{-1,p}(s,s_1)\to F^{-1}(s,s_1) \tag{94}$$

на множестве D_ε при $p\to\infty$. В силу непрерывности левой части (94) мы получим непрерывность предельной функции в правой части (94) на множестве D_ε. Используя этот факт и (93), получим:

$$\int\limits_t^T\int\limits_t^s\left(F^p(s,s_1)\right)^2ds_1ds=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon}\int\limits_{t+\varepsilon}^{s}\left(F^p(s,s_1)\right)^2ds_1ds\le$$

$$\le\frac{C}{p^2}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{t+\varepsilon}^{T-\varepsilon}f_{1/2}(s)\int\limits_{t+\varepsilon}^{s}f_{1/2}(s_1)ds_1ds=\frac{C}{p^2}\int\limits_t^Tf_{1/2}(s)\int\limits_t^sf_{1/2}(s_1)ds_1ds=$$

$$=\frac{C(T-t)^2}{4p^2}\int\limits_{-1}^1\frac{I_{1/2}(y)}{(1-y^2)^{1/2}}dy<\frac{K_1}{p^2}. \tag{95}$$

Из (95) и (91) имеем:

$$0\le\sum_{j_2,j_4=0}^{p}\left(g^p_{j_4j_2}\right)^2\le\lim_{p_1\to\infty}\sum_{j_2,j_4=0}^{p_1}\left(g^p_{j_4j_2}\right)^2=\sum_{j_2,j_4=0}^{\infty}\left(g^p_{j_4j_2}\right)^2\le\frac{K_1}{p^2}\to0 \tag{96}$$

при $p\to\infty$. Случай $i_2\ne i_4$, $i_2\ne0$, $i_4\ne0$ доказан.

Нетрудно получить аналогичный результат и для случаев $i_2=0$, $i_4\ne0$; $i_4=0$, $i_2\ne0$ и $i_2=0$, $i_4=0$. Тогда $\Delta_7^{(i_2i_4)}=0$ и $\Delta_3^{(i_2i_4)}=0$ с в. 1.

Рассмотрим $\Delta_5^{(i_1i_3)}$:

$$\Delta_5^{(i_1i_3)}=\Delta_4^{(i_1i_3)}+\Delta_6^{(i_1i_3)}-\Delta_8^{(i_1i_3)}\ \text{с. в. } 1,$$

где

$$\Delta_8^{(i_1i_3)}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_3,j_1=0}^{p}h^p_{j_3j_1}\zeta^{(i_1)}_{j_1}\zeta^{(i_3)}_{j_3},\ \ h^p_{j_3j_1}=\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_3)\int\limits_{s_3}^T\phi_{j_3}(s)F^p(s_3,s)dsds_3.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям мы получим, что $\Delta_8^{(i_1 i_3)}=0$ с в. 1. Здесь мы используем функцию $K_p(s,s_3)=\mathbf{1}_{\{s_3<s\}}F^p(s_3,s)$ и соотношение

$$h^p_{j_3 j_1}=\int\limits_{[t,T]^2} K_p(s,s_3)\phi_{j_1}(s_3)\phi_{j_3}(s)dsds_3\ (i_1\ne i_3,\ i_1\ne 0,\ i_3\ne 0).$$

В случае $i_1=i_3\ne 0$ мы используем для $h^p_{j_1 j_1}$ и $h^p_{j_3 j_1}+h^p_{j_1 j_3}$ правые части формул (86) и (87) соответственно, в которых следует заменить j_1 на j_4 и j_2 на j_3 соответственно.

Покажем, что

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} c^p_{j_3 j_3}=0. \tag{97}$$

Имеем

$$c^p_{j_3 j_3}=f^p_{j_3 j_3}+d^p_{j_3 j_3}-g^p_{j_3 j_3}. \tag{98}$$

Аналогично второму равенству в (83) получим

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} d^p_{j_3 j_3}=0.$$

Из (89) следует, что

$$0\le \lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} g^p_{j_3 j_3}\le \lim_{p\to\infty}\frac{(T-t)^2}{8(2p+3)(2p+1)}=0,$$

т.е. (97) выполнено. Равенства (74) доказаны для случая полиномов Лежандра.

Рассмотрим тригонометрический случай. Согласно (63):

$$a^p_{j_4 j_3}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s_1)\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^{s_1}\phi_{j_1}(s_2)ds_2\right)^2\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_4}(s)dsds_1.$$

Кроме того,

$$\left|\int\limits_t^{s_1}\phi_j(s_2)ds_2\right|\le\frac{K_0}{j}\ (j\ne 0),\ \int\limits_{s_1}^T\phi_0(s)ds=\frac{T-s_1}{\sqrt{T-t}},$$

$$|a^p_{j_4 j_3}|\le\frac{K_1}{j_4}\sum_{j_1=p+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\le\frac{K_1}{pj_4}\ (j_4\ne 0),\ |a^p_{0,j_3}|\le\frac{K_1}{p}. \tag{99}$$

Из (75)–(77) и (99) получим, что $\Delta_1^{(i_3 i_4)}=0$ с в. 1. Аналогично $\Delta_2^{(i_2 i_4)}=0$, $\Delta_4^{(i_1 i_3)}=0$, $\Delta_6^{(i_1 i_3)}=0$ с в. 1 и

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} a^p_{j_3 j_3}=0,\ \lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} b^p_{j_3 j_3}=0,\ \lim_{p\to\infty}\sum_{j_3=0}^{p} f^p_{j_3 j_3}=0.$$

Рассмотрим $\Delta_3^{(i_2 i_4)}$. В этом случае при $i_2=i_4\ne 0$ мы будем использовать (84)–(87). Имеем:

$$\int\limits_t^T\phi_{j_4}(s)\int\limits_s^T\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds=\frac{\sqrt{2}\sqrt{T-t}}{2\pi j_1}\int\limits_t^T\begin{cases}\phi_{j_4}(s)\left(1-\cos\frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t}\right)ds\\ \phi_{j_4}(s)\left(-\sin\frac{2\pi j_1(s-t)}{T-t}\right)ds\end{cases},$$

где $j_1 \geq p+1$, $j_4 = 0,\ 1, \ldots, p$. В силу ортонормированности тригонометрических функций, получим:

$$\int\limits_t^T \phi_{j_4}(s) \int\limits_s^T \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds = \frac{\sqrt{2}(T-t)}{2\pi j_1} \begin{cases} 1 \text{ или } 0 \text{ при } j_4 = 0 \\ 0 \text{ иначе} \end{cases} ; j_1 \geq p+1. \tag{100}$$

Из (100) и (85) – (87) следует, что

$$g^p_{j_4 j_2} + g^p_{j_2 j_4} = \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{(T-t)^2}{2\pi^2 j_1^2} \begin{cases} 1 \text{ или } 0 \text{ при } j_2 = j_4 = 0 \\ 0 \text{ иначе} \end{cases} \leq K_1/p, \tag{101}$$

$$g^p_{j_4 j_4} = \sum_{j_1=p+1}^{\infty} \frac{(T-t)^2}{4\pi^2 j_1^2} \begin{cases} 1 \text{ или } 0 \text{ при } j_4 = 0 \\ 0 \text{ иначе} \end{cases} \leq K_1/p. \tag{102}$$

Из (101), (102) и (75) получим $\Delta_7^{(i_2 i_4)} = 0$ и $\Delta_3^{(i_2 i_4)} = 0$ с в. 1 ($i_2 = i_4 \neq 0$). Аналогично полиномиальному случаю $\Delta_7^{(i_2 i_4)} = 0$ и $\Delta_3^{(i_2 i_4)} = 0$ с в. 1 ($i_2 \neq i_4$, $i_2 \neq 0$, $i_4 \neq 0$). Те же аргументы доказывают, что $\Delta_5^{(i_1 i_3)} = 0$ с в. 1.

Принимая во внимание (98) и соотношения

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{j_3=0}^{p} f^p_{j_3 j_3} = \lim_{p\to\infty} \sum_{j_3=0}^{p} d^p_{j_3 j_3} = 0,$$

которые следуют из оценок: $|f^p_{jj}| + |d^p_{jj}| \leq K_1/pj$, $|f^p_{00}| + |d^p_{00}| \leq K_1/p$, мы получим:

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{j_3=0}^{p} c^p_{j_3 j_3} = -\lim_{p\to\infty} \sum_{j_3=0}^{p} g^p_{j_3 j_3},\ 0 \leq \lim_{p\to\infty} \sum_{j_3=0}^{p} g^p_{j_3 j_3} \leq \lim_{p\to\infty} \frac{K_1}{p} = 0.$$

Таким образом, приходим к (97) для тригонометрического случая. Соотношения (74) доказаны для тригонометрического случая. Теорема 4 доказана.

6. Заключение

Полученные в работе результаты (теоремы 2–4) могут быть применены к реализации сильных [2], [4] численных методов порядков точности 1.0 (метод Мильштейна [3]), 1.5 и 2.0 для СДУ Ито вида (1) (случай многомерного винеровского процесса и функции $B(\mathbf{x}, t)$, допускающей зависимость не только от t, но и от $\mathbf{x}$), основанных на разложении Тейлора–Стратоновича [2], [6], [8]. Следует также отметить, что набор ПСИ Стратоновича кратностей 1–4 вида (3), используемый при построении указанных численных методов, универсален как для явных одношаговых численных методов, так и для их неявных, многошаговых и конечно-разностных (типа Рунге–Кутта) модификаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И.И., Скороход А.В. *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.* К.: Наукова думка, 1982, 612 с.
2. P.E. Kloeden, E. Platen *Numerical solution of stochastic differential equations.* Berlin: Springer-Verlag, 1992.
3. Мильштейн Г.Н. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений.* Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1988, 225 с.
4. G.N. Milstein, M.V. Tretyakov *Stochastic numerics for mathematical physics.* Berlin: Springer-Verlag, 2004.
5. E. Platen, W. Wagner *On a Taylor formula for a class of Ito processes* // Probab. Math. Statist. 1982. No. 3. P. 37–51.

6. P.E. Kloeden, E. Platen *The Stratonovich and Ito-Taylor expansions* // Math. Nachr. 1991. V. 151. P. 33–50.
7. Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. *Унифицированное разложение Тейлора-Ито* // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В.А. Стеклова. 1997. Т. 244. С. 186–204.
8. Кузнецов Д.Ф. *Новые представления разложения Тейлора-Стратоновича* // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В.А. Стеклова. 2001. Т. 278. С. 141–158.
9. Кузнецов Д.Ф. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2.* СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006, 764 с.
10. P.E. Kloeden, E. Platen, I.W. Wright *The approximation of multiple stochastic integrals* // Stoch. Anal. Appl. 1992. V. 10. No. 4. P. 431–441.
11. Кузнецов Д.Ф. *Новые представления явных одношаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой* // Жур. вычис. матем. матем. физ. 2001. Т. 41. № 6. С. 922–937.
12. E.W. Hobson *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931.
13. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа. II.* М.: Наука, 1973, 448 с.
14. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены.* М.: Физматлит, 2005, 480 с.

Дмитрий Феликсович Кузнецов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Политехническая ул., 29,
195251, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: sde_kuznetsov@inbox.ru