

УДК 519.624.2

НОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЯВНЫХ ОДНОШАГОВЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СКАЧКООБРАЗНОЙ КОМПОНЕНТОЙ¹⁾

© 2001 г. Д. Ф. Кузнецов

(195251 С.-Петербург, ул. Политехническая, 29, СПб. гос. техн. ун-т)

Поступила в редакцию 15.03.2000 г.

Рассматриваются методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) со скачкообразной компонентой. При построении данных численных методов используется специальная, адаптированная к скачкам процесса Пуассона, временная дискретизация, которая позволяет отдельно численно моделировать диффузионную и скачкообразную составляющие решения СДУ со скачкообразной компонентой. Представленные численные методы отличаются от известных в литературе способов численного моделирования диффузионной составляющей решения СДУ со скачкообразной компонентой. Отличия связаны с применением в данной работе унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, метода сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов (ПСИ) Стратоновича, основанного на кратных рядах Фурье, и новых слабых аппроксимаций ПСИ Ито.

1. ВВЕДЕНИЕ

Наряду с СДУ Ито с практической точки зрения интерес также представляют более общие стохастические уравнения – СДУ со скачкообразной компонентой. Данные стохастические уравнения, в частности, применяются в качестве математических моделей в стохастической финансовой математике и адекватно отражают скачкообразные изменения в динамике процентных ставок, форвардных процентных ставок и цен облигаций [1].

Одна из первых попыток построения численных методов для СДУ со скачкообразной компонентой и их численной реализации была предпринята в [2], где рассматривалось достаточно частное скалярное СДУ со скачкообразной компонентой без диффузионного и сносового членов, в котором вместо пуассоновской меры брался процесс Пуассона. В [3] построены численные методы для скалярного СДУ со скачкообразной компонентой, однако в [3] не освещен вопрос сходимости численных методов. В [4] рассмотрен метод Эйлера для СДУ со скачкообразной компонентой и доказана его среднеквадратическая сходимость. Дальнейшее развитие теория численного интегрирования СДУ со скачкообразной компонентой получила в [5]–[8]. В [5] предложен подход к численному интегрированию, основанный на применении специальной временной дискретизации, который позволяет отдельно численно моделировать диффузионную и скачкообразную составляющие решения СДУ со скачкообразной компонентой на каждом шаге интегрирования. В [5] представлен ряд сильных, а в [7] – слабых численных методов для СДУ со скачкообразной компонентой, которые основаны на данном подходе, а также доказана сходимость этих численных методов.

Как уже отмечалось, согласно [5], [7], численное интегрирование СДУ со скачкообразной компонентой можно осуществлять так, что на каждом шаге интегрирования диффузионная и скачкообразная составляющие решения моделируются отдельно. Это означает, что для численного моделирования диффузионной составляющей можно использовать численные методы для СДУ Ито, которым посвящено большое число работ (см., например, [9]–[14]). Для численного моделирования диффузионной составляющей в данной работе используются унифицированные разложения Тейлора–Ито [12], [15] и Тейлора–Стратоновича [16]. Эти стохастические разложения получены в [12], [15], [16] с помощью замены порядка интегрирования в ПСИ Ито [12] и соотношений между ПСИ Стратоновича и Ито [10], [12]. Главное отличие унифицирован-

¹⁾Работа выполнена при поддержке министерства общего и профессионального образования РФ (грант 97-0-1.8-71) и РФФИ (код проекта 99-01-00719).

ных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича от своих аналогов – разложения Тейлора–Ито [10], [17] и разложения Тейлора–Стратоновича [10], [18] – заключается в том, что они содержат значительно меньшее число различных ПСИ Ито и Стратоновича соответственно. Численное моделирование этих ПСИ, как известно, является основной проблемой на стадии реализации численных методов. Для преодоления этой проблемы в данной работе предлагается использовать эффективный метод сильной аппроксимации ПСИ Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье [12], [19], [20], а также новые слабые аппроксимации ПСИ Ито.

2. СИЛЬНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СДУ СО СКАЧКООБРАЗНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – фиксированное вероятностное пространство, с потоком σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, $\mathcal{F}_f \subset \mathcal{F}$. Рассмотрим систему СДУ со скачкообразной компонентой:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) ds + \int_0^t B(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s + \iint_{0 \times X} \mathbf{c}(\mathbf{x}_s, s, y) \tilde{\nu}(ds, dy), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ – решение системы (2.1); $\mathbf{f}_s$ есть $\mathcal{F}_s$ -измеримый при всех $s \in [0, T]$ m -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_s^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} \stackrel{\text{def}}{=} X$, $\nu(ds, dy)$ – пуассоновская мера, заданная в $[0, T] \times X$; $\mathbb{M}\{\nu(ds, dy)\} = \Pi(dy)ds$; $\tilde{\nu}(ds, dy) = \nu(ds, dy) - \Pi(dy)ds$ – мартингальная пуассоновская мера; $\Pi(dy)ds$ – мера интенсивности; $\Pi(X) < \infty$; $\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{c}(\mathbf{x}, s, y) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ – матричные функции, удовлетворяющие условиям существования и единственности решения уравнения (2.1) (см. [4]), процесс $\tilde{\nu}([0, s], dy)$ является $\mathcal{F}_s$ -измеримым при всех $s \in [0, T]$ и не зависящим от процесса $\mathbf{f}_s$; $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ есть $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина, для которой $\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$; $\mathbb{M}$ – оператор математического ожидания. Второй интеграл в правой части (2.1) понимается как стохастический интеграл Ито, а третий – как стохастический интеграл по мартингальной пуассоновской мере [4].

В [5] получен аналог разложения Тейлора–Ито для решения уравнения (2.1). Это разложение включает в себя ПСИ не только по винеровскому процессу, но и по мартингальной пуассоновской мере. Для того чтобы избежать проблемы аппроксимации ПСИ по мартингальной пуассоновской мере при построении численных методов для СДУ (2.1), в [5], [7] предлагается выбирать специальное, адаптированное к скачкам процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, разбиение промежутка $[0, T]$. При этом удастся добиться того, что на каждом шаге интегрирования диффузионная и скачкообразная компоненты решения моделируются отдельно. Рассмотрим указанный подход подробнее.

Процесс Пуассона $\nu([0, t], X)$, $t \in [0, T]$, генерирует последовательность моментов своих скачков, которые, очевидно, являются моментами скачков и процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$.

Введем в рассмотрение последовательность $\{\tau_j\}_{j=0}^\infty$ моментов остановки, для которой

$$0 = \tau_0 < \dots < \tau_{n_T+1} = T, \quad n_T < \infty \text{ с в. 1}, \quad (2.2)$$

$$\max_{1 \leq i \leq n_T+1} |\tau_i - \tau_{i-1}| \leq \Delta \text{ с в. 1}, \quad (2.3)$$

где $n_t = \max\{i = 0, 1, \dots : \tau_i \leq t\}$ для всех $t \in [0, T]$; здесь и далее “с в. 1” обозначает “вероятность 1”. Предполагается, что среди $\tau_0, \dots, \tau_{n_T+1}$ встречаются все моменты скачков процесса $\nu([0, t], X)$, $t \in [0, T]$, не превосходящие T , и если момент τ_{i+1} не является моментом скачка процесса $\nu([0, t], X)$, $t \in [0, T]$, то он $\mathcal{F}_{\tau_i}$ -измерим.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{\tau_i} + \int_{\tau_i}^t \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_s, s) ds + \int_{\tau_i}^t B(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s \text{ с в. 1} \quad (2.4)$$

при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, где

$$\tilde{a}(x, s) = a(x, s) - \int_X c(x, s, y) \Pi(dy), \quad i = 0, 1, \dots, n_T.$$

В то же время

$$x_{\tau_i} = x_{\tau_i-} + \int_{\tau_i-}^{\tau_i} \int_X c(x_{\tau_i-}, \tau_i, y) v(ds, dy) \quad \text{с в. 1,} \quad i = 1, 2, \dots, n_T. \quad (2.5)$$

Согласно (2.4), между моментами скачков процесса $v([0, t], X)$, $t \in [0, T]$, процесс Ито x_t , $t \in [0, T]$, описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито. Из (2.4), (2.5) получим

$$x_{\tau_{i+1}-} = x_{\tau_i} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-} \tilde{a}(x_s, s) ds + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-} B(x_s, s) df_s, \quad (2.6)$$

$$x_{\tau_{i+1}} = x_{\tau_{i+1}-} + \int_X c(x_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, y) v(\{\tau_{i+1}\}, dy)$$

с в. 1, где $i = 0, 1, \dots, n_T$. Если момент τ_{i+1} – момент скачка процесса Пуассона, то в [3], [7] предлагается численно моделировать стохастический интеграл во втором из соотношений (2.6) по формуле

$$\int_X c(x_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, y) v(\{\tau_{i+1}\}, dy) = c(x_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, \xi_i),$$

где ξ_i – независимые, $\Pi(dy)/\Pi(X)$ – распределенные случайные величины. При этом, как известно, временные интервалы между последовательными скачками процесса Пуассона являются независимыми и экспоненциально распределенными с параметром $\Pi(X)$ случайными величинами.

В [5], [7] для аппроксимации величины $x_{\tau_{i+1}-}$ из (2.6) используется разложение Тейлора–Ито [17]. В [12], [15], [16] получены унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, которые содержат значительно меньшее число различных ПСИ Ито и Стратоновича соответственно, нежели разложения Тейлора–Ито [17] и Тейлора–Стратоновича [18]. Аппроксимация ПСИ является достаточно сложной проблемой [9], [10], [12], [19]–[22], поэтому использование унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича дает возможность сократить вычислительные затраты на реализацию численных методов. Однако формально использовать унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича для аппроксимации величины $x_{\tau_{i+1}-}$ из (2.6) нельзя, так как эти разложения получены для постоянных моментов времени [12], [16], а не для моментов остановки. Тем не менее поскольку последовательность моментов скачков процесса Пуассона может быть численно смоделирована заранее, то последовательность моментов скачков процесса x_t , $t \in [0, T]$, не умаляя общности, можно считать известной и фиксированной. Выберем в качестве разбиения $\{\tau_j\}_{j=1}^{n_T+1}$ суперпозицию некоторого детерминированного разбиения с рангом дробления Δ и вычисленной заранее последовательности моментов скачков процесса x_t , $t \in [0, T]$ (см. [5], [7]). Тогда, очевидно, для аппроксимации величины $x_{\tau_{i+1}-}$ из (2.6) можно использовать унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича. Рассмотрим этот подход подробнее.

Пусть $\mathcal{L}$ – множество функций $R(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые дважды непрерывно дифференцируемы по x и один раз по t . Положим

$$^{(k)}A = \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1, \dots, m_k}, \quad m_1, \dots, m_k \geq 1,$$

$$^{(k)}A \cdot ^{(k)}B = \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_k=1}^{m_k} A^{(i_1 \dots i_k)} B^{(i_1 \dots i_k)}, \quad k \geq 1.$$

Договоримся понимать $\cdot^0$ как обычное умножение, а $^{(0)}A$ – как скаляр A . Обозначим

$$\|A_{k+1}D_k^{(i_k)}A_k\ldots A_2D_1^{(i_1)}A_1R(\mathbf{x}, t)\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)}A_{k+1}D_kA_k\ldots A_2D_1A_1\{R(\mathbf{x}, t)\}, \quad (2.7)$$

$$\underbrace{C\ldots C}_{j}R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} C^jR(\mathbf{x}, t), & j \geq 1, \\ R(\mathbf{x}, t), & j = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

где $C, A_p, D_q^{(i)}$ ($p = 1, 2, \dots, k+1, q = 1, 2, \dots, k; i = 1, 2, \dots, m$) – некоторые операторы, определенные на множестве $\mathcal{L}$. Предполагается, что правые части (2.7), (2.8) существуют.

Определим на множестве $\mathcal{L}$ следующие операторы:

$$LR(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^n \tilde{a}^{(k)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial x^{(k)}}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \sum_{i=1}^m B^{(ki)}(\mathbf{x}, t) B^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 R}{\partial x^{(j)} \partial x^{(k)}}(\mathbf{x}, t), \quad (2.9)$$

$$G_0^{(i)}R(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n B^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial x^{(j)}}(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.10)$$

Отметим, что $L\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t)$, $G_0^{(i)}\mathbf{x} = B_i(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $B_i(\mathbf{x}, t)$ есть i -й столбец матрицы $B(\mathbf{x}, t)$.

Введем в рассмотрение ПСИ Ито вида

$$I_{(l_1 \dots l_k)s,t}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (t - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (t - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}, & k \geq 1, \\ 1, & k = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

$$J_{(l_1 \dots l_k)s,t}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}, & k \geq 1, \\ 1, & k = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

где $i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots, m, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots$, и обозначим

$${}^{(k)}I_{(l_1 \dots l_k)s,t} = \|I_{(l_1 \dots l_k)s,t}^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^m, \quad {}^{(k)}J_{(l_1 \dots l_k)s,t} = \|J_{(l_1 \dots l_k)s,t}^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^m.$$

Используем для сильной аппроксимации величины $\mathbf{x}_{\tau_{p+1}-}$ из (2.6) унифицированные разложения Тейлора–Ито [12] по ПСИ Ито вида (2.11) и (2.12). В результате получим следующие численные схемы:

$$\begin{cases} y_{\tau_{p+1}-} = y_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{y_{\tau_p}\} \cdot {}^{k(k)}\hat{I}_{(l_1 \dots l_k)\tau_{p+1}, \tau_p}, \\ y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_{p+1}-} + \int_{\mathbf{x}} \mathbf{c}(y_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, y) \mathbf{v}(\{\tau_{p+1}\}, dy), \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} y_{\tau_{p+1}-} = y_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{y_{\tau_p}\} \cdot {}^{k(k)}\hat{J}_{(l_1 \dots l_k)\tau_{p+1}, \tau_p}, \\ y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_{p+1}-} + \int_{\mathbf{x}} \mathbf{c}(y_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, y) \mathbf{v}(\{\tau_{p+1}\}, dy), \end{cases} \quad (2.14)$$

где $p = 0, 1, \dots, n_T$, $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$, $G_q^{(i)} = (G_{q-1}^{(i)} L - L G_{q-1}^{(i)})/q$, $q = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, m$, $\mathcal{D}_q = \mathcal{D}'_q \cup \{(k, j, l_1, \dots, l_k) : k = l_1 = \dots = l_k = 0, 2j = q + 1\}$; $\mathcal{D}'_q = \{(k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2(j + l_1 + \dots + l_k) = q, k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots\}$; здесь и далее знак $\wedge$ указывает на аппроксимацию соответствующего ПСИ. Предполагается, что все частные производные и ПСИ, входящие в правые части (2.13), (2.14), существуют.

Рассмотрим аналоги численных схем (2.13), (2.14), основанные на унифицированных разложениях Тейлора–Стратоновича [16].

Определим на множестве $\mathcal{L}$ оператор $\bar{L}$ формулой

$$\bar{L}R(\mathbf{x}, t) = LR(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)} R(\mathbf{x}, t).$$

Введем в рассмотрение ПСИ Стратоновича вида

$$I_{(l_1 \dots l_k)s, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^{*s} (t - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{*\tau_2} (t - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}, & k \geq 1, \\ 1, & k = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$J_{(l_1 \dots l_k)s, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^{*s} (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{*\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}, & k \geq 1, \\ 1, & k = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

где $i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots, m$, $l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots$, $\int^*$ означает стохастический интеграл Стратоновича, и обозначим

$$I_{(l_1 \dots l_k)s, t}^{*(k)} = \|I_{(l_1 \dots l_k)s, t}^{*(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^m, \quad J_{(l_1 \dots l_k)s, t}^{*(k)} = \|J_{(l_1 \dots l_k)s, t}^{*(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^m.$$

Выпишем численные схемы для СДУ (2.1), основанные на унифицированных разложениях Тейлора–Стратоновича по ПСИ вида (2.15), (2.16):

$$\begin{cases} y_{\tau_{p+1}-} = y_{\tau_p} + \mathbb{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(\Delta_p)^{d+1}}{(d+1)!} L^{d+1} y_{\tau_p} + \\ + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j \{y_{\tau_p}\}^{k(k)} I_{(l_1 \dots l_k)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(k)}, \\ y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_{p+1}-} + \int_X c(y_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, y) v(\{\tau_{p+1}\}, dy), \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} y_{\tau_{p+1}-} = y_{\tau_p} + \mathbb{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(\Delta_p)^{d+1}}{(d+1)!} L^{d+1} y_{\tau_p} + \\ + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} \bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \{y_{\tau_p}\}^{k(k)} J_{(l_1 \dots l_k)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(k)}, \\ y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_{p+1}-} + \int_X c(y_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, y) v(\{\tau_{p+1}\}, dy), \end{cases} \quad (2.18)$$

где $p = 0, 1, \dots, n_T$, $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$, $\bar{G}_q^{(i)} = (\bar{G}_{q-1}^{(i)} \bar{L} - \bar{L} \bar{G}_{q-1}^{(i)})/q$, $q = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, m$, $\bar{G}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} G_0^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Предполагается, что все частные производные и ПСИ, входящие в правые части (2.17), (2.18), существуют.

Для сравнения отметим, что численные схемы (2.13), (2.14), (2.17), (2.18) при $r = 5, 6, 7$ содержат по 12, 20 и 33 различных ПСИ. В то же время аналог этих численных схем [5], основанный на разложении Тейлора–Ито [17], содержит уже 17, 29 и 51 различных ПСИ. Уже отмечалось, что численное моделирование ПСИ является непростой задачей, поэтому численные схемы (2.13), (2.14), (2.17), (2.18) имеют некоторое преимущество перед своим аналогом [5].

Сформулируем теорему о сходимости численной схемы (2.13), которая является аналогом соответствующего утверждения [5], относящегося к численной схеме, основанной на разложении Тейлора–Ито [17].

Пусть $M_2([0, T])$ – класс случайных функций $\xi(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые измеримы по совокупности переменных (t, ω) , $\mathcal{F}_t$ измеримы при всех $t \in [0, T]$ и удовлетворяют условию

$$\int_0^T \mathbb{M}(\xi_t)^2 dt < \infty.$$

Положим

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}. \quad (2.19)$$

Теорема 1. Пусть для данных $\Delta > 0$, $r \in N$, $\{\tau_j\}_{j=0}^{n_T+1}$ и всех $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $y \in X$, $i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots, m$, выполнены следующие условия:

1) для всех $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{A}_q$ и $t \in [0, T]$ имеем

$$\left| G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} - G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{z} \right| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{z}|, \quad K_1 < \infty,$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{x}, t, y) - \mathbf{c}(\mathbf{z}, t, y)| \leq C_1(y) |\mathbf{x} - \mathbf{z}|, \quad |\mathbf{c}(\mathbf{x}, t, y)| \leq C_2(y)(1 + |\mathbf{x}|);$$

2) для всех $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{A}_q$, $t \in [0, T]$ и $p = 0, 1, \dots, n_T + 1$ имеем

$$G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \quad G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x}_{\tau_p} \in M_2([0, T]),$$

$$\left| G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \right| \leq K_2(1 + |\mathbf{x}|), \quad K_2 < \infty;$$

3) для всех $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_r$, $g = 1, 2, \dots, m$, $t \in [0, T]$ имеем

$$LG_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x}_t, \quad G_0^{(g)} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x}_t \in M_2([0, T]),$$

$$\left| LG_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \right| + \left| G_0^{(g)} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \right| \leq K_1(1 + |\mathbf{x}|);$$

4) для всех $s, t \in [0, T]$ и $i = 1, 2, \dots, m$ имеем

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| \leq K_3(1 + |\mathbf{x}|) |s - t|^{1/2}, \quad K_3 < \infty,$$

$$|B_i(\mathbf{x}, s) - B_i(\mathbf{x}, t)| \leq K_4(1 + |\mathbf{x}|) |s - t|^{1/2}, \quad K_4 < \infty,$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{x}, s, y) - \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, y)| \leq C_3(y)(1 + |\mathbf{x}|) |s - t|^{1/2},$$

где $(C_i(y))^2$, $i = 1, 2, 3$, – скалярные, $\Pi(dy)$ – интегрируемые функции.

Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |x_t - \bar{y}_t|^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right\} \leq K_5 (1 + |x_0|^2) \Delta^r + K_6 |x_0 - \bar{y}_0|^2, \quad (2.20)$$

где постоянные K_5, K_6 не зависят от Δ и

$$\begin{aligned} \bar{y}_t = \bar{y}_0 + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}_q} \left[\sum_{p=0}^{n_t-1} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \bar{y}_{\tau_p} \}^{(k)} I_{(l_1, \dots, l_k) \tau_{p+1}, \tau_p} + \right. \\ \left. + \frac{(t - \tau_{n_t})^j}{j!} G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \bar{y}_{\tau_{n_t}} \}^{(k)} I_{(l_1, \dots, l_k) t, \tau_{n_t}} \right] + \int_0^t \int_X c(\bar{y}_{\tau_s}, \tau_s, y) v(ds, dy), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$t \in [0, T]$, $\bar{y}_0, x_0$ есть $\mathcal{F}_0$ -измеримые случайные величины.

Теорема 1 перефразирует теорему 3 из [5] для численной схемы (2.13) в предположении, что $\{\tau_j\}_{j=0}^{n_T+1}$ – разбиение, построенное по моментам скачков процесса Пуассона описанным выше способом.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, а также условия:

1) $\mathbb{M}(|x_0|^2) < \infty$, $\mathbb{M}(|x_0 - \bar{y}_0|^2) \leq K_7 \Delta^r$, $\mathbb{M}(|x_0 - y_0|^2) \leq K_8 \Delta^r$, $K_7, K_8 < \infty$, y_0 есть $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина;

2) для всех $p = 0, 1, \dots, n_t - 1, i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots, m, (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{D}_q$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{(l_1, \dots, l_k) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1, \dots, i_k)} - \hat{I}_{(l_1, \dots, l_k) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1, \dots, i_k)} \right)^2 \right\} \leq C_1 \Delta^{r+1}, \\ \mathbb{M} \left\{ \left(I_{(l_1, \dots, l_k) t, \tau_{n_t}}^{(i_1, \dots, i_k)} - \hat{I}_{(l_1, \dots, l_k) t, \tau_{n_t}}^{(i_1, \dots, i_k)} \right)^2 \right\} \leq C_1 \Delta^{r+1}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $C_1 < \infty, t \in [0, T]$.

Тогда $\mathbb{M}(|x_T - y_T|^2) \leq C_2 \Delta^r$, где постоянная C_2 не зависит от Δ , а процесс $y, t \in [0, T]$, получается из процесса $\bar{y}, t \in [0, T]$, вида (2.21) путем замены в (2.21) все ПСИ на их аппроксимации.

Теорема 2 является перефразировкой следствий к теореме 3 из [5].

Аналоги теорем 1, 2 могут быть сформулированы и для численных схем (2.14), (2.17), (2.18).

3. МЕТОДЫ СИЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПСИ СТРАТОНОВИЧА И ИТО

Для реализации рассмотренных выше численных методов необходимо уметь численно моделировать ПСИ Стратоновича и Ито вида

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\bar{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\bar{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (3.1)$$

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\bar{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\bar{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (3.2)$$

где $\psi_k(\tau), l = 1, 2, \dots, k$, – непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции, $w_t^{(i)} = f_t^{(i)}$ при $i = 1, 2, \dots, m, w_t^{(0)} = t, i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m, \int, \int^*$ – стохастические интегралы Ито и Страто-

новича соответственно. Очевидно, ПСИ вида (3.1), (3.2) являются несколько более общими, нежели ПСИ, входящие в (2.13), (2.14), (2.17), (2.18).

Кратко рассмотрим известные методы сильной аппроксимации совокупностей интегралов вида (3.1) и (3.2), которые могут быть использованы для реализации сильных численных методов (2.13), (2.14), (2.17), (2.18).

В [9] (см. также в [10], [21]) предложен метод разложения интегралов вида (3.1) в кратные ряды из произведений стандартных гауссовских случайных величин, который основан на разложении в тригонометрический ряд Фурье винеровского процесса [4]. Для получения разложения интеграла (3.1) по методу Г.Н. Мильштейна необходимо осуществить итеративный процесс, начиная с внутренних интегралов в (3.1), подстановки с последующим интегрированием разложений фурье-компонент винеровского процесса f . Эта процедура является сложной и не приводит к общей формуле разложения интеграла (3.1) произвольной кратности k . В результате в [9], [10], [21] представлены лишь разложения интегралов вида (3.1) кратностей от 1 до 3.

В [12], [19], [20] предложен другой метод сильной аппроксимации интегралов вида (3.1). Он основан на представлении интеграла $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ в виде кратного стохастического интеграла от специальной разрывной неслучайной функции k переменных с последующим ее разложением в кратный ряд Фурье по полным ортонормированным в пространстве $L_2([t, T])$ системам непрерывно дифференцируемых функций. В результате в [12], [19], [20] получена общая формула разложения интеграла вида (3.1) произвольной кратности k в кратный ряд из произведений стандартных гауссовских случайных величин. Далее будем называть описанный метод методом кратных рядов Фурье.

Приведем формулировку доказанной в [12], [19], [20] теоремы, на которой основан метод кратных рядов Фурье.

Определим на гиперкубе $[t, T]^k$ функцию

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-1} \mathbb{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}, & k \geq 2, \\ \psi_1(t_1), & k = 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\mathbb{1}_A$ — индикатор множества A .

Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t, T])$.

Определим класс $H([t, T]) \subset L_2([t, T])$ кусочно-гладких на открытом интервале (t, T) и ограниченных на промежутке $[t, T]$ функций $f(x)$, для которых ряд Фурье $\sum_{j=0}^\infty C_j \phi_j(x)$ с коэффициентами $C_j = \int_t^T f(x) \phi_j(x) dx$ сходится во всякой внутренней точке x промежутка $[t, T]$ к величине $[f(x+0) + f(x-0)]/2$ и равномерно к $f(x)$ в любом замкнутом интервале непрерывности $f(x)$, а также сходится при $x = t, T$ (здесь и далее сходимость рядов Фурье понимается в смысле нормы в пространстве $L_2([t, T])$).

Положим

$$C_{j_{q-1} \dots j_1}(t_q, \dots, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[t, T]^{q-1}} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^{q-1} \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_{q-1}, \quad 2 \leq q \leq k, \quad (3.4)$$

$$C_{j_0 \dots j_1}(t_1, \dots, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} K(t_1, \dots, t_k).$$

Теорема 3 (см. [12], [19], [20]). Пусть для некоторого $k \geq 1$ выполнены следующие условия:

- 1) $\psi_i(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, k$, — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции;
- 2) $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t, T])$;
- 3) $G_{j_{q-1} \dots j_1}(t_q, \dots, t_k) \in H([t, T])$ по переменной t_q , $q = 1, 2, \dots, k$.

Тогда интеграл вида (3.1) разлагается в следующий сходящийся в среднем степени n ($n \in N$) кратный ряд:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} \quad (3.5)$$

где $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$,

$$\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int_0^T \varphi_{j_l}(s) d\tilde{w}_s^{(i_l)}$$

суть стандартные гауссовские случайные величины при различных i_l или j_l (если $i_l \neq 0$);

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \varphi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k. \quad (3.6)$$

В [12] показано, что метод кратных рядов Фурье дает в случае тригонометрической системы функций такие же разложения интегралов вида (3.1) как и метод Г.Н. Мильштейна, а в случае полиномиальной системы функций дает существенно более простые разложения интегралов вида (3.1).

Для сильной аппроксимации интегралов вида (3.2) в литературе иногда применяют методы прямоугольников или трапеций (см., например, [9]). Однако эти методы сходятся в несколько раз медленнее в среднеквадратическом смысле, чем метод Мильштейна (см. [9]) и метод кратных рядов Фурье [12]. Однако можно, используя стандартные соотношения между интегралами вида (3.1), (3.2) [10], [12], представить интеграл вида (3.2) конечной суммой интегралов вида (3.1) кратностей не больше k и аппроксимировать затем эти интегралы методом кратных рядов Фурье.

Отметим, что если $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q$ – аппроксимация интеграла $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$, которая имеет вид

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} \quad (3.7)$$

где $q < \infty$ ($i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots, m$) и попарно различны, то (см. [12], [20])

$$M\{(J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q - J^*[\psi^{(k)}]_{T,t})^2\} = \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1}^2. \quad (3.8)$$

В [12], [19], [20] представлены аппроксимации интегралов вида (3.1) кратностей 1 и 2, а в [22] – кратностей от 1 до 5 с помощью метода кратных рядов Фурье по полиномиальной системе функций. В этих работах также вычислены среднеквадратические погрешности аппроксимаций рассмотренных стохастических интегралов.

Приведем примеры применения теоремы 3. Рассмотрим полную ортонормированную систему полиномов в пространстве $L_2([t, T])$:

$$\varphi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j\left(\left(x - \frac{T+t}{2}\right) \frac{2}{T-t}\right), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3.9)$$

где $P_j(x)$ – полином Лежандра.

Используя теорему 3 и систему функций (3.9), получаем

$$I_{(0)T,t}^{*(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_{00}^{(i_1)}, \quad I_{(1)T,t}^{*(i_1)} = \frac{(T-t)^{3/2}}{2} \left(\zeta_{00}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_{11}^{(i_1)} \right) \text{ с. в. 1,}$$

$$I_{(2)T,t}^{*(i_1)} = \frac{(T-t)^{5/2}}{3} \left(\zeta_{00}^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_{11}^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_{22}^{(i_1)} \right) \text{ с. в. 1,} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
 I_{(00)T,t}^{*(i_2 i_1)} &= \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} (\zeta_{i-1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i-1}^{(i_1)}) \right], \\
 I_{(01)T,t}^{*(i_2 i_1)} &= -\frac{(T-t)^2}{4} \left\{ \frac{4}{3} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{2}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_2^{(i_1)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i-1}^{(i_1)} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \zeta_i^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} ((i+2) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} - (i+1) \zeta_{i+2}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)}) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 I_{(10)T,t}^{*(i_2 i_1)} &= -\frac{(T-t)^2}{4} \left\{ \frac{2}{3} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{-1}{\sqrt{4i^2-1}} \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i-1}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} ((i+1) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} - (i+2) \zeta_{i+2}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)}) + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

где

$$\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \varphi_j(s) df_s^{(i)},$$

$$\begin{aligned}
 I_{(000)T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)} &= -\frac{1}{T-t} (I_{(0)T,t}^{*(i_1)} I_{(10)T,t}^{*(i_2 i_3)} + I_{(0)T,t}^{*(i_3)} I_{(10)T,t}^{*(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} I_{(0)T,t}^{*(i_1)} (I_{(00)T,t}^{*(i_3 i_2)} - I_{(10)T,t}^{*(i_2 i_3)}) + \\
 &\quad + \frac{1}{6} (T-t)^{3/2} \zeta_0^{(i_1)} \left\{ \zeta_0^{(i_3)} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} - \sqrt{3} \zeta_1^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_2)} \right) + \zeta_1^{(i_3)} \zeta_1^{(i_2)} \right\} - \\
 &\quad - \frac{(T-t)^{3/2}}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{\substack{j=0 \\ k+j-i=2p \geq 0, p \in \mathbb{Z}}}^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} L_{ijk} K_{j, k+1, (k+j-i)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{j=k+2 \\ k+j-i=2p \geq 0, p \in \mathbb{Z}}}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} L_{ijk} K_{k+1, j, (k+j-i)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ k+j-i=2p \geq 2, p \in \mathbb{Z}}}^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} L_{ijk} K_{j, k-1, (k+j-i)/2-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{j=k \\ k+j-i=2p \geq 2, p \in \mathbb{Z}}}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} L_{ijk} K_{k-1, j, (k+j-i)/2-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \right.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{j=0 \\ k+j-i=2p \geq -2, p \in \mathbb{Z}}}^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} M_{ijk} K_{j, k+1, (k+j-i)/2+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& + \sum_{\substack{j=k+2 \\ k+j-i=2p \geq -2, p \in \mathbb{Z}}}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} M_{ijk} K_{k+1, j, (k+j-i)/2+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& + \sum_{\substack{j=0 \\ k+j-i=2p \geq 0, p \in \mathbb{Z}}}^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} M_{ijk} K_{j, k-1, (k+j-i)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& + \sum_{\substack{j=k \\ k+j-i=2p \geq 0, p \in \mathbb{Z}}}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} M_{ijk} K_{k-1, j, (k+j-i)/2} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \Big],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{ijk} &= \sqrt{\frac{2j+1}{(2k+1)(2i+1)}} \frac{1}{2i+3}, \quad \bar{M}_{ijk} = \sqrt{\frac{2j+1}{(2k+1)(2i+1)}} \frac{1}{2i-1}, \\
K_{mnk} &= \frac{a_{m-k} a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}} \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1}, \quad a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!}, \quad m \leq n.
\end{aligned}$$

Разложения (3.10)–(3.13) сходятся в среднем степени n ($n \in \mathbb{N}$) к соответствующим ПСИ. Согласно (3.8), при $i_1 \neq i_2$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{M} \left\{ \left(I_{(00)T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{(00)T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2-1} \right), \\
& \mathbb{M} \left\{ \left(I_{(10)T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{(10)T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \mathbb{M} \left\{ \left(I_{(01)T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{(01)T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\
& = \frac{(T-t)^4}{16} \left\{ \frac{7}{9} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{4i^2-1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} + \frac{(i+2)^2 + (i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} \right) \right\},
\end{aligned}$$

где $I_{(00)T,t}^{*(i_2 i_1)q}$, $I_{(10)T,t}^{*(i_2 i_1)q}$, $I_{(01)T,t}^{*(i_2 i_1)q}$ получаются из правых частей (3.10)–(3.13) путем замены ∞ на q .

4. СЛАБЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СДУ СО СКАЧКООБРАЗНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

Рассмотрим слабые численные методы для СДУ (2.1) в автономном случае, т.е. когда $a(x, t) \equiv a(x)$, $B(x, t) \equiv B(x)$, $c(x, t, y) \equiv c(x, y)$. В качестве основы для построения слабых численных методов возьмем соотношения (2.6) и унифицированные разложения Тейлора–Ито [12], [15]. Имеем

$$\begin{cases} y_{\tau_{p+1}-} = y_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} \tilde{G}_{l_1} \dots \tilde{G}_{l_k} \tilde{L}^j \{y_{\tau_p}\} \cdot \hat{I}_{(l_1 \dots l_k) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(k)}, \\ y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_{p+1}-} + \int_X c(y_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, y) v(\{\tau_{p+1}\}, dy), \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} \tilde{L}^j \tilde{G}_{l_1} \dots \tilde{G}_{l_k} \{y_{\tau_p}\}^{(k)} \tilde{J}_{(l_1,\dots,l_k)\tau_{p+1},\tau_p}, \\ y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_{p+1}-} + \int_X c(y_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, y) v(\{\tau_{p+1}\}, dy), \end{cases} \quad (4.2)$$

где $p = 0, 1, \dots, n_T$, $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$, $\mathcal{A}_q$ имеет вид (2.19), $\tilde{G}_q^{(i)} = (\tilde{G}_{q-1}^{(i)} \tilde{L} - \tilde{L} \tilde{G}_{q-1}^{(i)})/q$, $q = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots, m$, операторы $\tilde{L}$, $\tilde{G}_0^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$, получаются из операторов L , $G_0^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$, соответственно путем замены $a(x, t)$, $B(x, t)$, $c(x, t, y)$ на $a(x)$, $B(x)$, $c(x, y)$; остальные обозначения такие же, как в (2.13), (2.14). Предполагается, что все частные производные и ПСИ, входящие в правые части (4.1), (4.2), существуют.

Численные схемы (4.1), (4.2) имеют два существенных отличия от численных методов (2.13), (2.14). Во-первых, в правые части (4.1), (4.2) входят все ПСИ Ито из унифицированных разложений Тейлора–Ито [12] кратностей от 1 до r . В численные же методы (2.13), (2.14) входят лишь те ПСИ Ито, которые имеют при $\tau_{p+1} \downarrow \tau_p$ в среднеквадратическом смысле порядки $O((\tau_{p+1} - \tau_p)^\gamma)$, $\gamma = 0.5, 1.0, 1.5, \dots, 0.5r$. Во-вторых, ПСИ Ито из (2.13), (2.14) аппроксимируются в сильном смысле, т.е. в соответствии с условием (2.22), а ПСИ Ито из (4.1), (4.2) аппроксимируются в слабом смысле, т.е. в соответствии с условием (4.3) (см. ниже).

Через $\tilde{y}_t$, $t \in [0, T]$, обозначим случайный процесс, который получается из $\bar{y}_t$, $t \in [0, T]$, вида (2.21) путем замены в (2.21) операторов $G_{l_1}, \dots, G_{l_k}$, L на $\tilde{G}_{l_1}, \dots, \tilde{G}_{l_k}$, $\tilde{L}$ соответственно и множества $\mathcal{D}_q$ на множество $\mathcal{A}_q$.

Пусть $C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ – пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые вместе со своими частными производными до порядка l включительно имеют полиномиальный рост (функция $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет полиномиальный рост, если существуют постоянные $C_F > 0$ и $\gamma_F \in \mathbb{N}$, зависящие от F и такие, что $|F(x)| \leq C_F(1 + |x|^{2\gamma_F})$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$).

Сформулируем теорему о слабой сходимости дискретной аппроксимации $\tilde{y}_{\tau_p}$, $p = 0, 1, \dots, n_T + 1$, которая является перефразировкой соответствующего утверждения из [7], относящегося к слабой сходимости численного метода типа (4.1), но основанного на разложении Тейлора–Ито [17].

Теорема 4. Пусть для фиксированного $r \in \mathbb{N}$ и функции $g(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ выполнены следующие условия:

- 1) $g(x) \in C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$;
- 2) функции $a(x)$, $B(x)$, $c(x, y)$ непрерывно дифференцируемы $2(r+1)$ раз и их производные ограничены;

- 3) для всех $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{A}_q$, $i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots, m$, и $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\tilde{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \tilde{G}_{l_k}^{(i_k)} \tilde{L}^j x| \leq K(1 + |x|), \quad K < \infty.$$

Тогда $|\mathbb{M}\{g(x_T)\} - \mathbb{M}\{g(\tilde{y}_T)\}| \leq C\Delta^r$, где постоянная $C < \infty$ не зависит от Δ .

Опираясь на работы [7], [10], можно заключить, что если вдобавок к условиям теоремы 4 выполнено условие такое: $(k_g, j, l_1^{(g)}, \dots, l_{k_g}^{(g)}) \in \mathcal{A}_{k_g}$, $i_1^{(g)}, \dots, i_{k_g}^{(g)} = 1, 2, \dots, m$, $k_g \leq r$, $g = 1, 2, \dots, l$, $l = 1, 2, \dots, 2r+1$, $p = 0, 1, \dots, n_T$,

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l I_{(l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)})\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})} - \prod_{g=1}^l \tilde{I}_{(l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)})\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})} \right\} \right| \leq K_1 \Delta^{r+1+j}, \quad (4.3)$$

где $K_1 < \infty$ – постоянная, то

$$|\mathbb{M}\{g(x_T)\} - \mathbb{M}\{g(y_T)\}| \leq C_1 \Delta^r, \quad (4.4)$$

где постоянная $C_1 < \infty$ не зависит от Δ , а y_T определяется численной схемой (4.1) при $p = n_T$.

Условие (4.3) является аналогом соответствующего условия [10] для ПСИ из разложения Тейлора–Ито [17].

5. СЛАБАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПСИ ИТО

Отметим две особенности слабой аппроксимации ПСИ. Во-первых, слабые аппроксимации ПСИ являются гораздо более простыми [9], [10], чем сильные аппроксимации, и, как правило, содержат одну, две или три случайные величины с определенными свойствами (ср. с теоремой 3). Это объясняется тем, что условие (4.3) предоставляет гораздо больше свободы при построении аппроксимаций, нежели условие (2.22). Во-вторых, для построения слабых аппроксимаций ПСИ, в отличие от сильных (теорема 3), нет общего “рецепта”. Это означает, что слабые аппроксимации ПСИ Ито строятся путем искусного подбора таким образом, чтобы выполнялось условие (4.3) при данном r . При этом большинство слабых аппроксимаций, соответствующих некоторому r , как правило, уже не может быть использовано в качестве слабых аппроксимаций для некоторого $r_1 > r$. Заметим, что для сильных аппроксимаций ПСИ наблюдается обратная картина, так как в зависимости от r меняется лишь число q в (3.7), а общий вид формулы для аппроксимации ПСИ остается тем же.

В [9], [10] построены слабые аппроксимации ПСИ Ито из разложения Тейлора–Ито [17] для $r = 1, 2$ в случае многомерного винеровского процесса f_s и для $r = 3$ в случае скалярного винеровского процесса.

Построение слабых аппроксимаций ПСИ Ито для $r > 3$ сопряжено с определенными трудностями, так как условие (4.3) при различных $k, j, l_1, \dots, l_k, l, i_1, \dots, i_k$ включает в себя десятки моментных условий, которые необходимо удовлетворить. Количество различных ПСИ Ито, подлежащих слабой аппроксимации, и, как следствие, количество моментных условий можно резко сократить, если использовать вместо разложения Тейлора–Ито [17] унифицированное разложение Тейлора–Ито [12]. Так, при $r = 4$ и скалярном винеровском процессе f_s в правую часть (4.1) входит 15 различных аппроксимаций ПСИ Ито. Аналог этой численной схемы, основанный на разложении Тейлора–Ито [17], содержит уже 26 различных аппроксимаций ПСИ Ито, и, как следствие, в [9], [10] не получены слабые аппроксимации ПСИ при $r = 4$.

Для построения слабых аппроксимаций ПСИ Ито при $r = 4$ необходимо, согласно (4.3), учесть следующие моментные соотношения:

$$\mathbb{M}\{I_3\} = \mathbb{M}\{I_3(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_3I_{00}\} = 0, \quad \mathbb{M}\{I_3I_0\} = -\Delta^4/4,$$

$$\mathbb{M}\{I_2(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_2I_{00}\} = \mathbb{M}\{I_2I_{000}\} = \mathbb{M}\{I_2I_{0000}\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_2(I_{00})^2\} = \mathbb{M}\{I_2(I_0)^4\} = \mathbb{M}\{I_2I_{000}I_0\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_2I_{00}(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_2I_{10}\} = \mathbb{M}\{I_2I_{01}\} = \mathbb{M}\{I_2I_{11}I_0\} = \mathbb{M}\{I_2\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_2I_0\} = \Delta^3/3, \quad \mathbb{M}\{I_2(I_0)^3\} = \Delta^4, \quad \mathbb{M}\{I_2I_{00}I_0\} = \Delta^4/3, \quad \mathbb{M}\{I_2I_{11}\} = -\Delta^4/4,$$

$$\mathbb{M}\{I_\mu\} = \mathbb{M}\{I_\mu I_0\} = \mathbb{M}\{I_\mu I_{000}\} = \mathbb{M}\{I_\mu(I_0)^3\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_\mu I_{00}I_0\} = \mathbb{M}\{I_\mu I_{11}\} = 0, \quad \mathbb{M}\{I_{20}(I_0)^2\} = \Delta^4/6, \quad \mathbb{M}\{I_{20}I_{00}\} = \Delta^4/12,$$

$$\mathbb{M}\{I_{11}(I_0)^2\} = \Delta^4/4, \quad \mathbb{M}\{I_{11}I_{00}\} = \Delta^4/8, \quad \mathbb{M}\{I_{02}(I_0)^2\} = \Delta^4/2,$$

$$\mathbb{M}\{I_{02}I_{00}\} = \Delta^4/4, \quad \mathbb{M}\{I_\lambda I_{01}\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_{11}I_0\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_\lambda\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_0\} = \mathbb{M}\{I_\lambda(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_{00}\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_\lambda I_{11}\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_{0000}\} = \mathbb{M}\{I_\lambda(I_{00})^2\} = \mathbb{M}\{I_\lambda(I_0)^4\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_\lambda I_{000}I_0\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_{00}(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_{10}\} = 0,$$

$$\mathbb{M}\{I_{100}I_{000}\} = -\Delta^4/24, \quad \mathbb{M}\{I_{100}(I_0)^3\} = -\Delta^4/4, \quad \mathbb{M}\{I_{100}I_{00}I_0\} = -\Delta^4/8,$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}\{I_{010}I_{000}\} &= -\Delta^4/12, \quad \mathbb{M}\{I_{010}(I_0)^3\} = -\Delta^4/2, \quad \mathbb{M}\{I_{010}I_{00}I_0\} = -\Delta^4/4, \\
 \mathbb{M}\{I_{001}I_{000}\} &= -\Delta^4/8, \quad \mathbb{M}\{I_{001}(I_0)^3\} = -3\Delta^4/4, \quad \mathbb{M}\{I_{001}I_{00}I_0\} = -3\Delta^4/8, \\
 \mathbb{M}\{I_\rho I_0\} &= \mathbb{M}\{I_\rho I_{000}\} = \mathbb{M}\{I_\rho(I_0)^3\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{00}I_0\} = 0, \\
 \mathbb{M}\{I_\rho I_1\} &= \mathbb{M}\{I_\rho I_{0000}\} = \mathbb{M}\{I_\rho(I_0)^5\} = \mathbb{M}\{I_\rho(I_{00})^2 I_0\} = 0, \\
 \mathbb{M}\{I_\rho I_{00}(I_0)^3\} &= \mathbb{M}\{I_\rho I_{000}(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{0000}I_0\} = 0, \\
 \mathbb{M}\{I_\rho I_{000}I_{00}\} &= \mathbb{M}\{I_\rho I_{100}\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{010}\} = 0, \\
 \mathbb{M}\{I_\rho I_{001}\} &= \mathbb{M}\{I_\rho I_2\} = \mathbb{M}\{(I_\rho)^2 I_0\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{00}I_1\} = 0, \\
 \mathbb{M}\{I_{10}I_{01}I_0\} &= \mathbb{M}\{I_\rho\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_1(I_0)^2\} = 0, \\
 \mathbb{M}\{I_{10}(I_0)^2\} &= -\Delta^3/3, \quad \mathbb{M}\{I_{10}I_{00}\} = -\Delta^3/6, \quad \mathbb{M}\{I_{10}(I_{00})^2\} = -\Delta^4/3, \\
 \mathbb{M}\{I_{10}(I_0)^4\} &= -2\Delta^4, \quad \mathbb{M}\{I_{10}I_{000}I_0\} = -\Delta^4/6, \quad \mathbb{M}\{I_{10}I_{00}(I_0)^2\} = -5\Delta^4/6, \\
 \mathbb{M}\{(I_{10})^2\} &= \Delta^4/12, \quad \mathbb{M}\{I_{10}I_{01}\} = \Delta^4/8, \quad \mathbb{M}\{I_{10}I_1I_0\} = -5\Delta^4/24, \\
 \mathbb{M}\{I_{01}(I_0)^2\} &= -2\Delta^3/3, \quad \mathbb{M}\{I_{01}I_{00}\} = -\Delta^3/3, \quad \mathbb{M}\{I_{01}(I_{00})^2\} = -2\Delta^4/3, \\
 \mathbb{M}\{I_{01}(I_0)^4\} &= -4\Delta^4, \quad \mathbb{M}\{I_{01}I_{000}I_0\} = -\Delta^4/3, \quad \mathbb{M}\{I_{01}I_{00}(I_0)^2\} = -5\Delta^4/3, \\
 \mathbb{M}\{(I_{01})^2\} &= \Delta^4/4, \quad \mathbb{M}\{I_{01}I_1I_0\} = 3\Delta^4/8,
 \end{aligned}$$

где $\mu \stackrel{\text{def}}{=} 02, 11$ или 20 ; $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} 100, 010$ или 001 ; $\rho \stackrel{\text{def}}{=} 10$ или 01 ; $\mathbb{M}\{\cdot | \mathcal{F}_{\tau_p}\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}\{\cdot\}$; $\hat{I}_{(l_1 \dots l_k)\tau_{p+1}, \tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{I}_{l_1 \dots l_k}$ — аппроксимация ПСИ Ито вида

$$I_{(l_1 \dots l_k)\tau_{p+1}, \tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_p - t_1)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{t_{k-1}} (\tau_p - t_k)^{l_1} df_{t_k} \dots df_{t_1},$$

где f_s — скалярный стандартный винеровский процесс, $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta$.

Приведенные моментные соотношения получены с помощью стандартных свойств стохастических интегралов Ито [4], а также следующих справедливых с вероятностью 1 и вытекающих из формулы Ито равенств:

$$\begin{aligned}
 (I_0)^4 &= 24I_{0000} + 12\Delta I_{00} + 3\Delta^2, \quad (I_{00})^2 = 6I_{0000} + 2\Delta I_{00} + \Delta^2/2, \\
 I_{00}(I_0)^2 &= 12I_{0000} + 5\Delta I_{00} + \Delta^2, \quad (I_0)^5 = 120I_{00000} + 60\Delta I_{000} + 15\Delta^2 I_0, \\
 (I_{00})^2 I_0 &= 30I_{00000} + 12\Delta I_{000} + 10\Delta^2 I_0/4, \\
 I_{00}(I_0)^3 &= 60I_{00000} + 27\Delta I_{000} + 6\Delta^2 I_0, \quad I_{00}I_1 = I_{001} + I_{010} + I_{100} - \Delta^2 I_0/2, \\
 I_{000}(I_0)^2 &= 20I_{00000} + 7\Delta I_{000} + \Delta^2 I_0, \quad I_{0000}I_0 = 5I_{00000} + \Delta I_{000}, \\
 I_{000}I_{00} &= 10I_{00000} + 3\Delta I_{000} + \Delta^2 I_0/2, \\
 I_{01}I_0 &= 2I_{001} + I_{010} - (I_2 - \Delta^2 I_0)/2, \\
 I_{10}I_0 &= I_{010} + I_{100} + \Delta I_1 + I_2, \quad I_1 I_0 = I_{10} + I_{01} - \Delta^2/2, \\
 I_{000}I_0 &= 4I_{0000} + \Delta I_{00}, \quad (I_0)^2 = 2I_{00} + \Delta,
 \end{aligned}$$

$$(I_0)^3 = 6I_{000} + 3\Delta I_0, \quad I_{00}I_0 = 3I_{000} + \Delta I_0,$$

где $I_{(l_1 \dots l_k)\tau_p, \tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} I_{l_1 \dots l_k}$.

Нетрудно видеть, что условие (4.3) будет выполнено при $r = 4$, если верно следующее:

$$\hat{I}_0 = \sqrt{\Delta}\zeta_0, \quad \hat{I}_{00} = \frac{1}{2}\Delta[(\zeta_0)^2 - 1], \quad \hat{I}_1 = -\frac{\Delta^{3/2}}{2}\left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1\right),$$

$$\hat{I}_{000} = \Delta^{3/2}/6[(\zeta_0)^3 - 3\zeta_0], \quad \hat{I}_{0000} = \frac{\Delta^2}{24}[(\zeta_0)^4 + 6(\zeta_0)^2 + 3],$$

$$\hat{I}_{100} = -\frac{\Delta^{5/2}}{24}[(\zeta_0)^3 - 3\zeta_0], \quad \hat{I}_{010} = -\frac{\Delta^{5/2}}{12}[(\zeta_0)^3 - 3\zeta_0],$$

$$\hat{I}_{001} = -\frac{\Delta^{5/2}}{8}[(\zeta_0)^3 - 3\zeta_0], \quad \hat{I}_{11} = \frac{\Delta^3}{8}[(\zeta_0)^2 - 1],$$

$$\hat{I}_{20} = \frac{\Delta^3}{12}[(\zeta_0)^2 - 1], \quad \hat{I}_{02} = \frac{\Delta^3}{4}[(\zeta_0)^2 - 1],$$

$$\hat{I}_3 = -\frac{\Delta^{7/2}}{4}\zeta_0, \quad \hat{I}_2 = \frac{\Delta^{5/2}}{3}\left(\zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1\right),$$

$$\hat{I}_{10} = \Delta^2 \left\{ -\frac{1}{6}[(\zeta_0)^2 - 1] - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 \pm \frac{1}{12\sqrt{2}}[(\zeta_1)^2 - 1] \right\},$$

$$\hat{I}_{01} = \Delta^2 \left\{ -\frac{1}{3}[(\zeta_0)^2 - 1] - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 \mp \frac{1}{12\sqrt{2}}[(\zeta_1)^2 - 1] \right\},$$

где

$$\zeta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} df_s, \quad \zeta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\sqrt{3}}{\Delta^{3/2}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(s - \tau_p - \frac{\Delta}{2}\right) df_s;$$

ζ_0, ζ_1 – независимые стандартные гауссовские случайные величины; $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998. Т. 1, 2.
2. Wright D.J. Digital simulation of Poisson stochastic differential equations // Internat. J. Systems Sci. 1980. V. 11. № 6. P. 781–785.
3. Дзагнидзе З.А., Читашвили Р.Я. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Тр. Тбилисского гос. ун-та. Ин-т прикл. матем. Тбилиси, 1975. Т. IV. С. 267–279.
4. Гухман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М.: Наука, 1975. Т. 3.
5. Platen E. An approximation method for a class of Ito processes with jump component // Lietuvos Matem. Rink. 1982. V. 22. P. 124–136.
6. Maghsoodi Y., Harris C.J. In-probability approximation and simulation of nonlinear jump-diffusion SDE // IMA J. Math. Control Inform. 1987. № 4. P. 65–92.
7. Mikulevicius R., Platen E. Time discrete Taylor approximations for Ito processes with jump component // Math. Nachr. 1988. V. 138. P. 93–104.
8. Maghsoodi Y. Mean-square efficient numerical solution of jump-diffusion SDE: Preprint OR72. Univ. Southampton, UK, 1994.
9. Мильштейн Г.Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988.

10. Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer, 1992.
11. Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. Numerical solution of SDE through computer experiments. Berlin: Springer, 1994.
12. Кузнецов Д.Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. СПб.: СПбГУ, 2001.
13. Platen E. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations // Acta Numer. 1999. № 8. P. 195–244.
14. Никитин Н.Н., Разевиг В.Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 1. С. 106–117.
15. Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Унифицированное разложение Тейлора–Ито // Зап. научн. семинаров ПОМИ РАН. Вероятность и статистика 2. СПб., 1997. Т. 244. С. 186–204.
16. Кузнецов Д.Ф. Два новых представления разложения Тейлора–Стратоновича // СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.
17. Platen E., Wagner W. On a Taylor formula for a class of Ito processes // Probl. Math. Statist. 1982. V. 3. P. 37–51.
18. Kloeden P.E., Platen E. The Stratonovich- and Ito-Taylor expansions // Math. Nachr. 1991. V. 151. P. 33–50.
19. Кузнецов Д.Ф. Применение методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито к численному моделированию управляемых стохастических систем // Пробл. управления и информатики. 1999. № 4. С. 91–108.
20. Кузнецов Д.Ф. Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанное на кратных рядах Фурье // Зап. научн. семинаров ПОМИ РАН. Вероятность и статистика. 3. СПб., 1999. Т. 260. С. 164–185.
21. Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W. The approximation of multiple stochastic integrals // Stoch. Analys. and Appl. 1992. V. 10. № 4. P. 431–441.
22. Кузнецов Д.Ф. Применение полиномов Лежандра к сильной аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.

ПОПРАВКА

В статье Д.Ф. Кузнецова “Новые представления явных шаговых методов для стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой”, опубликованной в № 6 нашего журнала с. г., допущены следующие опечатки:

стр. 926, формулы (2.17), (2.18): везде вместо Δp должно быть Δ_p ;

стр. 930–931: номер формулы (3.10) относится к первой строке на стр. 931;

стр. 931, формула (3.13): вместо $I_{(10)T,t}^{*(i_2 i_3)}$ должно быть $I_{(00)T,t}^{*(i_2 i_3)}$;

стр. 935, 11-я строка сверху: величина $5\Delta^4/24$ положительная;

3-я строка снизу: вместо $(I_2 - \Delta^4 I_0)/2$ должно быть $(I_2 + \Delta^2 I_0)/2$;

стр. 936, 5-я строка сверху: должно быть

$$\hat{I}_{000} = \frac{\Delta^{3/2}}{6} [(\zeta_0)^3 - 3\zeta_0], \quad \hat{I}_{0000} = \frac{\Delta^2}{24} [(\zeta_0)^4 - 6(\zeta_0)^2 + 3].$$

Редакция